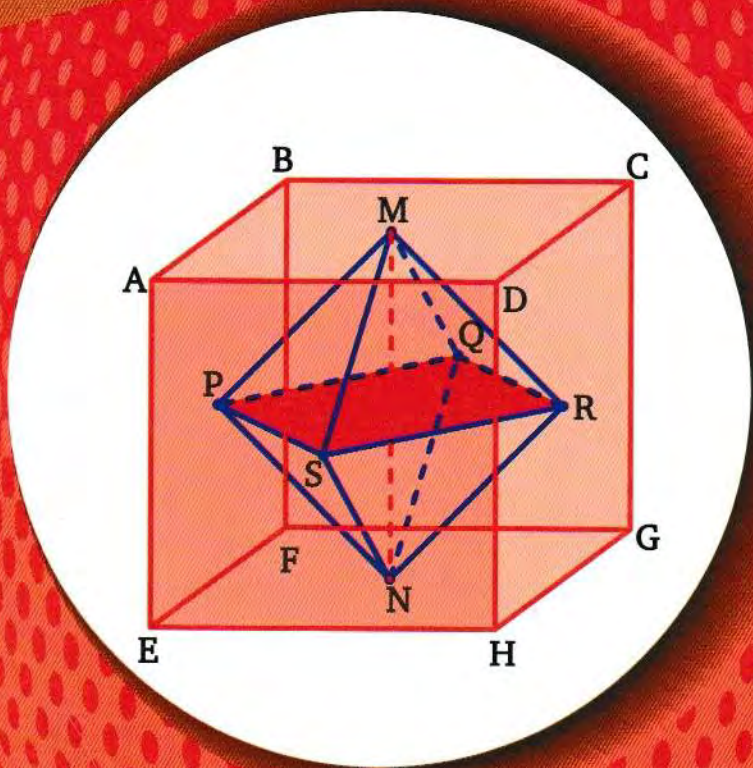


13

Polígonos Regulares - Simetría

Teoría y Práctica

G
E
O
M
E
T
R
Í
A



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Alex Noa Lume

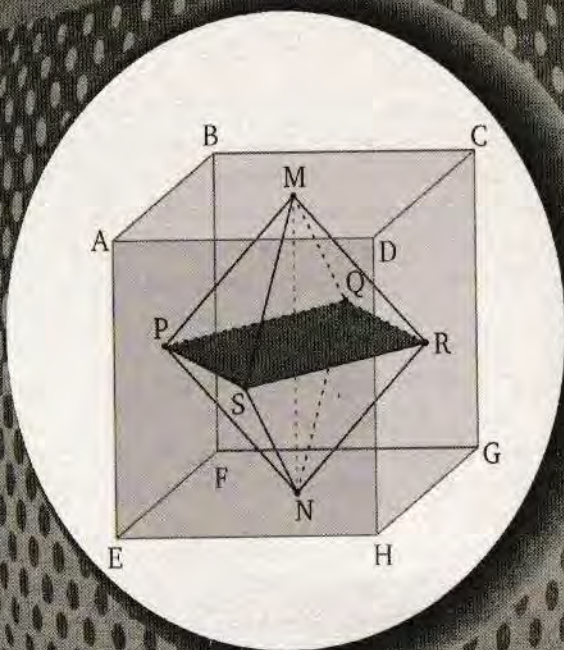
FONDO EDITORIAL
ARODO

13

Polígonos Regulares - Simetría

Teoría y Práctica

G
E
O
M
E
T
R
Í
A



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Alex Noa Lume

FONDO EDITORIAL
ARODO

PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2016, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

Fondo Editorial RODO

De: Walter Z. Benítez Nuñez.

POLÍGONOS REGULARES - SIMETRÍA



GEOMETRÍA - TEMA SELECTO 13, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

**DERECHOS RESERVADOS © Marzo 2016 por
FONDO EDITORIAL RODO**

de Walter Z. Benítez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

**Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
Nº: 2016-03142**

EQUIPO PEDAGÓGICO

Alex Noa Lume

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

Claudia Llosa La Serna

José Miguel Gallo Ballena

IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **GRAFIC PLUS S. A. C.**

Jr. Chíncha N° 434 A. H. VIZONA LIMA - Lima 11

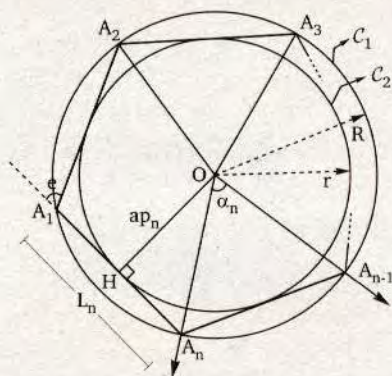
POLÍGONO REGULAR

DEFINICIÓN

Es el polígono convexo cuyos lados tienen longitudes iguales y cuyos ángulos tienen medidas iguales.

CARACTERÍSTICAS PARTICULARES

- Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia a cuyo radio se le denomina circunradio del polígono (R)
- Todo polígono regular se puede circunscribir a una circunferencia a cuyo radio se le denomina inradio del polígono (r)
- Las circunferencias inscrita y circunscrita a un polígono regular tienen el mismo centro, el cual es también el centro del polígono. (O)
- A la perpendicular trazada desde el centro a un lado del polígono se le denomina apotema (OH).
- Al ángulo cuyo vértice es el centro y cuyos lados contienen a dos vértices consecutivos se le denomina ángulo central ($\angle A_n O A_{n-1}$).
- Al triángulo que se forma al unir el centro con dos vértices consecutivos se le denomina triángulo elemental. ($\triangle OA_2 A_3$)



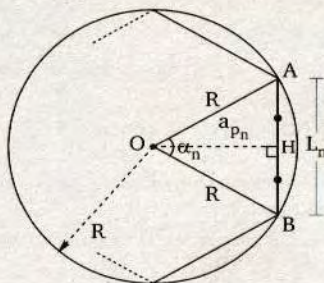
- C_1 : Circunferencia circunscrita (R : circunradio)
 C_2 : Circunferencia inscrita (r : inradio)
 O : Centro del polígono
 L_n : Longitud del lado del polígono regular de "n" lados.
 a_{p_n} : Longitud de la apotema del polígono regular de "n" lados
 $\angle A_n O A_{n-1}$: Ángulo central del polígono regular.
 $\triangle A_2 O A_3$: Triángulo elemental.

Se cumple:

$$e = \alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$$

Cálculo de " L_n " y " a_{p_n} " en función del circunradio (R) y del ángulo central.

Sea $\triangle AOB$: Triángulo elemental del polígono de " n " lados.



$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$\triangle AOB$: Ley de cosenos:

$$(L_n)^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cos \alpha_n$$

$$L_n = R \sqrt{2 - 2 \cos \alpha_n}$$

$\triangle OHB$: Teorema de Pitágoras

$$(a_{p_n})^2 + \left(\frac{L_n}{2}\right)^2 = R^2$$

$$a_{p_n} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L_n^2}$$

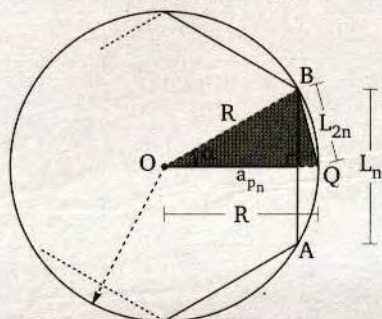
Además de lo anterior:

$$L_n^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha_n$$

$$a_{p_n} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - (2R^2 - 2R^2 \cos \alpha_n)}$$

$$a_{p_n} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \alpha_n}$$

Cálculo de " L_{2n} " en función del circunradio y de " L_n "



$\Delta O B Q$: Ley de cosenos:

$$(L_{2n})^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cos \alpha$$

Pero:

$$\cos \alpha = \frac{a_{p_n}}{R} \quad \wedge \quad a_{p_n} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L_n^2}$$

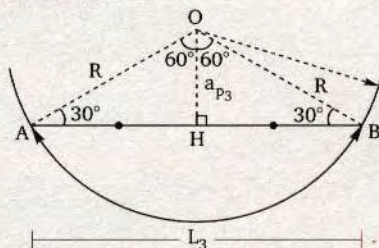
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}{2R}$$

$$(L_{2n})^2 = 2R^2 - 2R \cdot R \frac{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}{2R}$$

$$L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

A continuación se indica las longitudes de los lados y apotemas de los principales polígonos en función del circunradio.

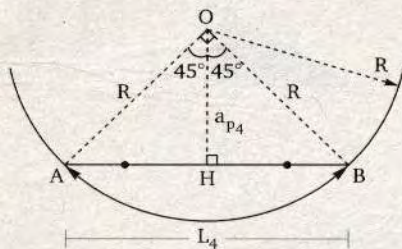
L_3 y a_{p_3} en función de R



$$\alpha_3 = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

$$AB = L_3 = R\sqrt{3}$$

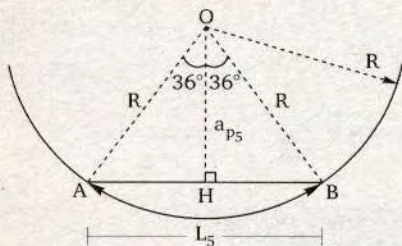
$$a_{p_3} = OH = \frac{R}{2}$$

L_4 y a_{p_4} en función de R 

$$\alpha_4 = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$$L_4 = AB = R\sqrt{2}$$

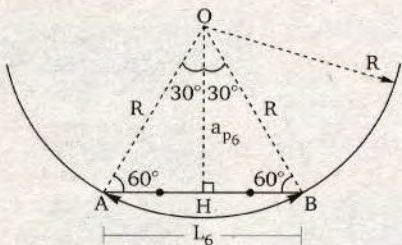
$$a_{p_4} = OH = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

 L_5 y a_{p_5} en función de R 

$$\alpha_5 = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

$$L_5 = AB = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$a_{p_5} = OH = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

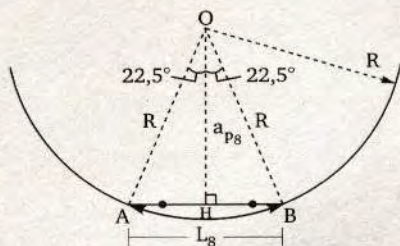
 L_6 y a_{p_6} en función de R 

$$\alpha_6 = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

$$L_6 = AB = R$$

$$a_{p_6} = OH = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

L_8 y a_{p8} en función de R

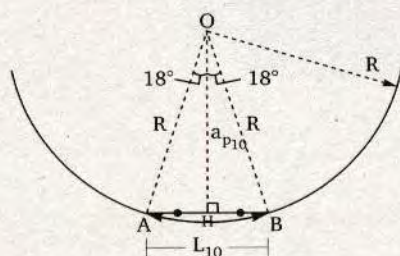


$$\alpha_8 = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$L_8 = AB = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$a_{p8} = OH = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

L_{10} y a_{p10} en función de R

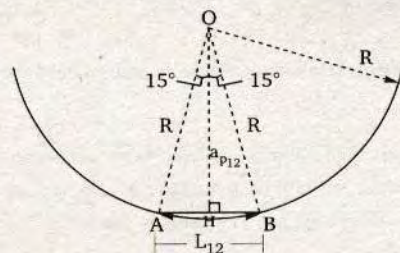


$$\alpha_{10} = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$L_{10} = AB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$a_{p10} = OH = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

L_{12} y a_{p12} en función de R



$$\alpha_{12} = m\widehat{AB} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

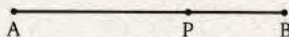
$$L_{12} = AB = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$a_{p12} = OH = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13**DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN**

Dado el segmento $\overline{AB}$ y el punto P ($P \in \overline{AB}$); el punto P divide a $\overline{AB}$ en media y extrema razón si y solo si: $(AP)^2 = (AB)(PB)$ siendo $AP > PB$.

En un gráfico:



Si P divide en media y extrema razón a $\overline{AB}$ siendo $AP > PB$, entonces:

$$(AP)^2 = (AB)(PB)$$

$$\text{Pero: } PB = AB - AP$$

$$(AP)^2 = (AB)(AB - AP)$$

$$AP = AB \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)$$

$\overline{AP}$: Sección áurea de $\overline{AB}$

$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$: Número áureo

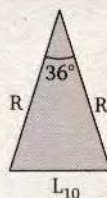
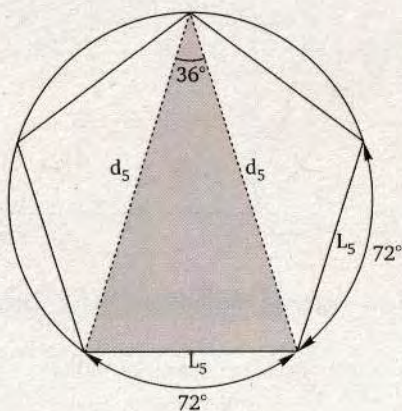
Propiedades:

- Dado el segmento AB y un punto P de $\overline{AB}$, tal que $\overline{AP}$ es la sección áurea de $\overline{AB}$, entonces $\overline{PB}$ es congruente a la sección áurea de $\overline{AP}$.
- El lado del decágono regular es congruente a la sección áurea del circunradio del decágono.
- El lado de un pentágono regular es congruente a la sección áurea de la diagonal del pentágono.
- El triángulo formado con un lado de un pentágono regular, un lado de un hexágono regular y un lado de un decágono regular que tienen el mismo circunradio es siempre un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el lado del pentágono; es decir los catetos son el lado del hexágono y el lado de decágono.

TEOREMA:

La longitud del lado de un pentágono regular es la sección áurea de la longitud de su diagonal

DEMOSTRACIÓN: Sean L_5 y d_5 las longitudes del lado y la diagonal de un pentágono regular, respectivamente.



Por teoría:

$$L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Ahora en el problema : $L_5 = L_{10}$ con circunradio $R = d_5$

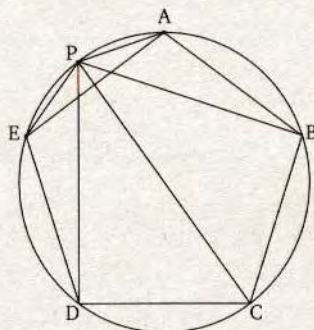
$$\Rightarrow L_5 = \frac{d_5}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

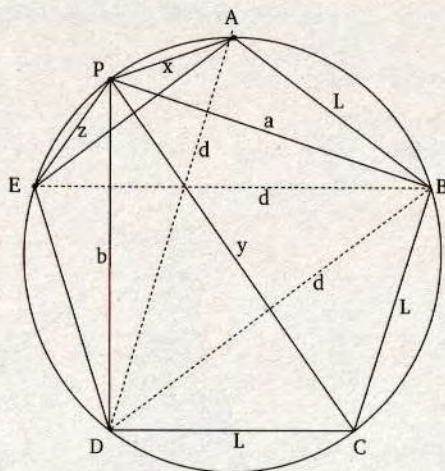
$\therefore L_5$ es la sección áurea de d_5

TEOREMA:

En la figura, ABCDE es un pentágono regular y P es un punto del arco AE, entonces:

$$PA + PC + PE = PB + PD$$



BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13**DEMOSTRACIÓN:**

Sean $PA = x$, $PB = a$, $PC = y$, $PD = b$, $PE = z$, $AB = L$ y la longitud de la diagonal es igual a d .

Ahora, por el teorema de Ptolomeo, en el $\triangle ABDE$:

$$xd + bL = ad \quad \text{..... (I)}$$

También, en el $\triangle PBDE$:

$$zd + aL = bd \quad \text{..... (II)}$$

Sumando (I) y (II): $\Rightarrow xd + zd + aL + bL = ad + bd \quad \text{..... (III)}$

En el $\triangle PBCD$: $aL + bL = yd \quad \text{..... (IV)}$

Reemplazando (IV) en (III):

$$\Rightarrow xd + zd + yd = ad + bd$$

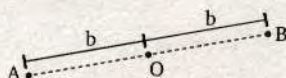
$$\therefore x + y + z = a + b$$

SIMETRÍA EN EL PLANO**SIMETRÍA CENTRAL**

Es la que se realiza con respecto a un punto. A dicho punto se le denomina centro de simetría.

PUNTOS SIMÉTRICOS RESPECTO A UN PUNTO

Dos puntos A y B son simétricos respecto al punto O, si O es el punto medio de $\overline{AB}$.



A y B: Puntos simétricos con respecto a O.

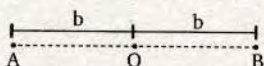
O: Centro de simetría.

FIGURA SIMÉTRICA CON RESPECTO A UN PUNTO

Una figura F se denomina simétrica respecto al punto O si todo punto de F tiene su simétrico en F respecto al punto O.

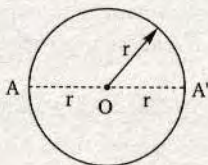
EJEMPLOS

- El segmento $\overline{AB}$ es simétrico respecto a su punto medio.



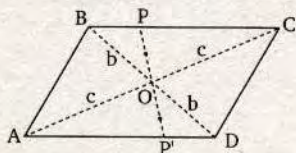
O: Centro de simetría.

- Una circunferencia C es simétrica respecto a su centro.



O: Centro de simetría de la circunferencia C.

- Todo paralelogramo es simétrico respecto al punto de intersección de sus diagonales.

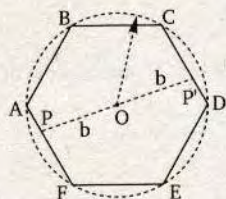


O: Centro de simetría del paralelogramo ABCD.

**NOTA**

Ningún otro cuadrilátero tiene centro de simetría.

Todo polígono regular cuyo número de lados es par es simétrico respecto a su centro (centro de la circunferencia circunscrita).

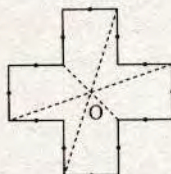


O: Centro de simetría del hexágono regular ABCDEF.

**NOTAS**

Los polígonos regulares cuyo número de lados es impar no tienen centro de simetría.

- Existen polígonos no convexos que tienen centro de simetría.

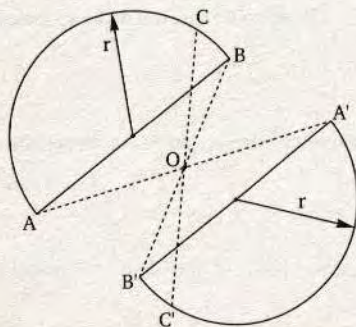


O: Centro de simetría del polígono no convexo mostrado.

FIGURAS SIMÉTRICAS

Dos figuras F_1 y F_2 son simétricas respecto a un punto O si todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico en la otra respecto al punto O. Al punto O se le denomina centro de simetría.

En el gráfico las semicircunferencias de diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son simétricas respecto al punto O.



O: Centro de simetría

NOTA

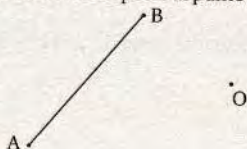
Dos figuras simétricas respecto a un punto son congruentes. Dos figuras congruentes no necesariamente son simétricas.

CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UNA FIGURA CON RESPECTO A UN PUNTO

Dada la figura F_1 y el centro de simetría O , para obtener el simétrico de F_1 respecto a O , basta determinar los puntos simétricos de cada uno de los puntos de F_1 con respecto a O .

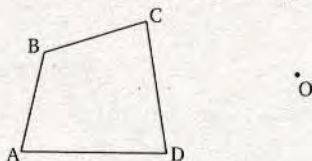
Para un segmento, hay que determinar los puntos simétricos de sus extremos y luego trazar el segmento que los une.

Ejemplo: Determinar el simétrico de $\overline{AB}$ respecto al punto O .



Para un polígono, hay que determinar los puntos simétricos de sus vértices y luego trazar ordenadamente los segmentos que unen dichos puntos.

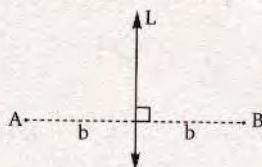
Ejemplo: Determinar el simétrico de ABCD respecto al punto O .

**SIMETRÍA AXIAL**

Es la que se realiza con respecto a una recta. A dicha recta se le denomina eje de simetría.

PUNTOS SIMÉTRICOS RESPECTO A UNA RECTA

Dos puntos A y B son simétricos con respecto a una recta L , si $\overline{L}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.



A y B : Puntos simétricos respecto a $\overline{L}$.

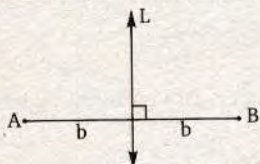
L : Eje de simetría.

FIGURA SIMÉTRICA CON RESPECTO A UNA RECTA

Una figura F se denomina simétrica respecto a una recta L , si todo punto de F tiene su simétrico en F respecto a la recta L ; a esta recta se le denomina eje de simetría.

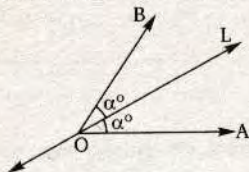
EJEMPLOS

- El segmento $\overline{AB}$ es simétrico respecto a su recta mediatriz.



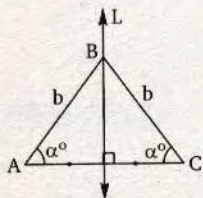
$\overline{L}$: Eje de simetría de $\overline{AB}$.

- El ángulo es simétrico respecto a la recta que contiene a su bisectriz..

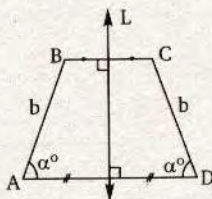


$\overline{L}$: Eje de simetría del $\angle AOB$.

- Asimismo el triángulo isósceles y el trapecio isósceles presentan un eje de simetría.

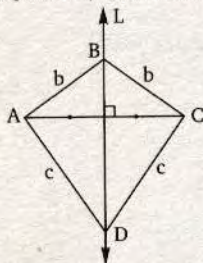


$\overline{L}$: Eje de simetría del $\triangle ABC$

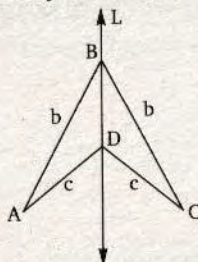


$\overline{L}$: Eje de simetría del trapecio ABCD

- El trapecoide y el cuadrilátero no convexo pueden tener un eje de simetría.



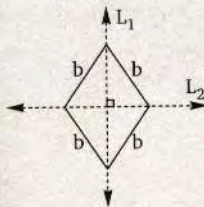
$\overline{L}$: Eje de simetría del $\square ABCD$



$\overline{L}$: Eje de simetría del $\angle ABCD$.

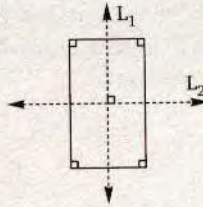
- Todo paralelogramo, excepto el romboide, presentan ejes de simetría.

ROMBO



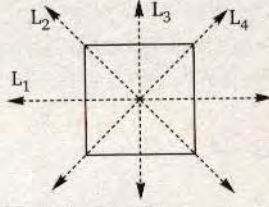
$\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$: Ejes de simetría

RECTÁNGULO



$\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$: Ejes de simetría

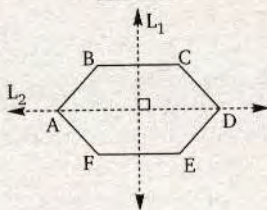
CUADRADO



$\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$, $\overline{L_3}$ y $\overline{L_4}$: Ejes de simetría.

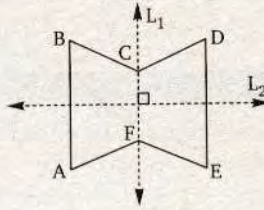
- Un polígono convexo o no convexo puede tener más de un eje de simetría.

CONVEXO



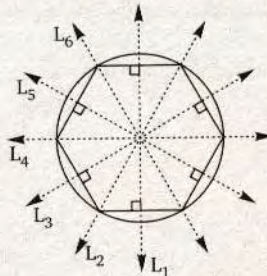
$\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$: Eje de simetría del ABCDEF

NO CONVEXO

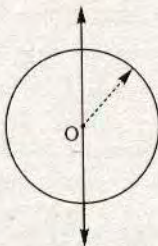


$\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$: Eje de simetría del ABCDEF

- El número de ejes de simetría de un polígono regular es igual al número de lados del mismo.



- La circunferencia y el círculo tienen infinitos ejes de simetría (son las rectas que contienen a sus diámetros)

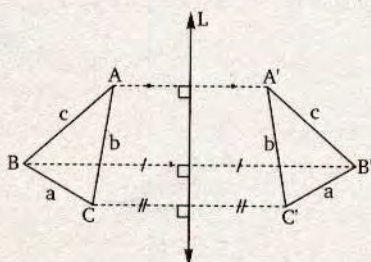


$\overline{L}$: Eje de simetría

FIGURAS SIMÉTRICAS

Dos figuras F_1 y F_2 son simétricas respecto a una recta L si todo punto de cada una de ellas tiene su simétrico en la otra respecto a la recta L . A la recta L se le denomina eje de simetría.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son simétricos respecto a $\overline{L}$.



$\overline{L}$: Eje de simetría

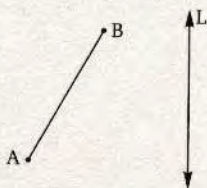
**NOTA**

Dos figuras simétricas respecto a una recta son congruentes. Dos figuras congruentes no necesariamente son simétricas.

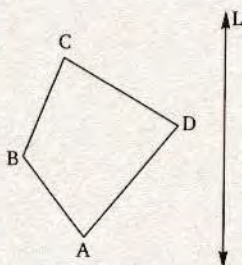
CONSTRUCCIÓN DEL SIMÉTRICO DE UNA FIGURA CON RESPECTO A UNA RECTA

Dada la figura F_1 y un eje de simetría L , para obtener el simétrico de F_1 respecto a la recta L , basta determinar los puntos simétricos de cada uno de los puntos de la figura dada.

Ejemplo 01: Determinar el simétrico de $\overline{AB}$ respecto a la recta L .

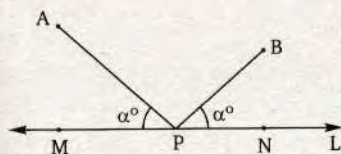


Ejemplo 02: Determinar el simétrico de ABCD respecto a la recta L .



APLICACIONES DE LA SIMETRÍA

- 1) Si dos puntos A y B están el mismo semiplano determinado por una recta L y P es un punto de $\overline{L}$; entonces $(AP + PB)$ es mínimo cuando: $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ determinan ángulos de igual medida con la recta L y A, B y P son no colineales.



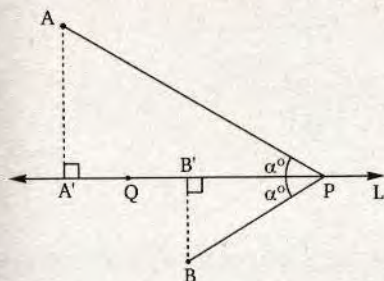
Si:

$A \wedge B$: Están en el mismo semiplano determinado por $\overline{L}$

P: Punto de $\overline{L}$ y $(AP + PB)$ es mínimo.

Entonces: $m\angle APM = m\angle BPN$

- 2) Si dos puntos A y B están en distintos semiplanos por una recta L siendo $d_{A \rightarrow \overline{L}} > d_{B \rightarrow \overline{L}}$ y P es un punto de $\overline{L}$, entonces $(PA - PB)$ es máximo cuando $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ determinan ángulos de igual medida con la recta L y A, P y B son no colineales.



Si:

$A \wedge B$: En distintos semiplanos determinado por $\overline{L}$
($AA' > BB'$).

P: Punto de $\overline{L}$ y $(AP - PB)$ es máximo.

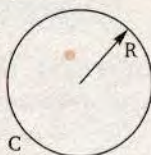
Entonces: $m\angle APQ = m\angle BPQ$

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Tomemos una circunferencia cualquiera y sea C su longitud. Inscribamos en ésta un polígono regular de n lados. Si P_n es el perímetro del polígono tenemos $C > P_n$ o sea $C - P_n > 0$. Pero a esta diferencia $C - P_n$, la podemos hacer tan pequeña como queramos haciendo crecer n. Este hecho se expresa diciendo que C es el límite de P_n cuando n crece.

DEFINICIÓN. La longitud de una circunferencia es el límite de los perímetros de los polígonos regulares inscritos.

Todas las circunferencias tienen la misma forma. Uno de los teoremas más profundos de las matemáticas nos dice: La razón de la longitud de la circunferencia al diámetro es la misma para cualquier circunferencia $\left(\frac{C}{2r} \text{ es constante}\right)$. Es decir:

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

$$\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r} = \text{cte.}$$

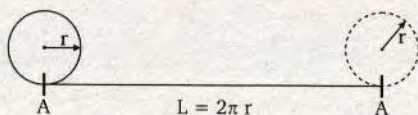
DEFINICIÓN: El número π es la razón constante $\frac{C}{2r}$.

Entonces la longitud de la circunferencia en función del radio es:

$$C = 2\pi R$$

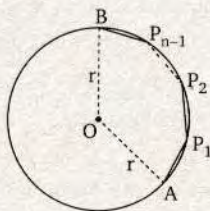
Los matemáticos griegos decidieron indicar, con una letra de su alfabeto, el número de veces que la circunferencia contiene su propio diámetro. La letra escogida fue la letra π , se conocen muchas cifras (tiene infinitas). Como las primeras son 3,141592653589... pero normalmente consideramos como valor de π a 3,14.

Una circunferencia, al dar una vuelta completa, describe una trayectoria cuya longitud es la de la circunferencia.

**LONGITUD DE ARCO**

Las mismas consideraciones que nos han llevado a definir la longitud de la circunferencia pueden llevarnos a definir la longitud de un arco cualquiera de ella.

DEFINICIÓN. La longitud del arco AB es el límite de $AP_1 + P_1P_2 + \dots + P_{n-1}B$ cuando n crece.



Si la longitud del arco AB es L , el radio correspondiente mide r y el arco AB mide θ (en grados sexagesimales), entonces:

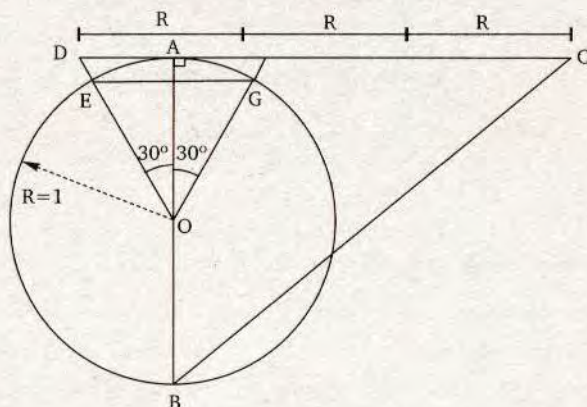
$$L = 2\pi r \left(\frac{\theta}{360} \right)$$

RECTIFICACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Se han desarrollado muchas construcciones para determinar gráficamente un segmento de longitud aproximadamente igual a la de una circunferencia o de una de sus partes. Aquí presentamos dos de las más elegantes y a su vez las más aproximadas.

MÉTODO DE KOCHANSKI

Se dibuja una circunferencia de radio R . Se traza el triángulo equilátero OEG . Se traza una recta paralela al segmento EG que pasa por A , prolongándola hasta que corte a la prolongación del segmento OE , obteniendo D . Desde el punto D y sobre la recta se transporta 3 veces el radio de la circunferencia y se obtiene el punto C . El segmento BC es aproximadamente la mitad de la longitud de la circunferencia.



Sea: $R = 1$

$$\Delta ABC: (BC)^2 = (AB)^2 + (3 - DA)^2 \dots (I)$$

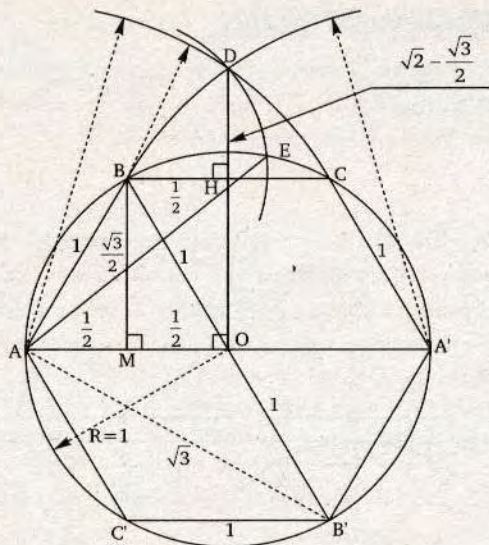
$$\Delta ADO: AD = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{Not. } 30^\circ \wedge 60^\circ)$$

$$\text{En (I): } (BC)^2 = 2^2 - \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \rightarrow BC = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = 3,14153\dots$$

El valor obtenido se aproxima bastante al valor de π ($L_{AB} = \pi R = \pi$).

MÉTODO DE MASCHERONI

Se dibuja una circunferencia de radio R y se inscribe un hexágono regular. El punto D es la intersección de dos arcos de circunferencia: el arco BD con centro en A' , y el arco CD con centro en A . Luego obtenemos el punto E como intersección del arco DE , de centro en B , y la circunferencia. El segmento AE es un cuarto de la longitud de la circunferencia, aproximadamente.



Sea : $R = 1$

* Por el hexágono regular: $AB = BC = CA = R = 1$

* $\triangle ABC$: $AC = AD = \sqrt{3}$

* $\triangle AOD$: $(AD)^2 = (AO)^2 + (DO)^2 \rightarrow \sqrt{3}^2 = 1^2 + (DO)^2 \rightarrow DO = \sqrt{2}$

* $\triangle BHD$: $(BD)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow BD = BE = \sqrt{3 - \sqrt{6}}$

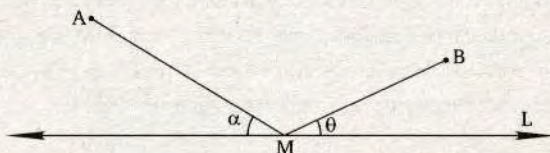
* $\triangle BEB'$: $(EB')^2 = 2^2 - (\sqrt{3 - \sqrt{6}})^2 \rightarrow EB' = \sqrt{1 + \sqrt{6}}$

* $\square ABEB'$: Teorema de Ptolomeo.

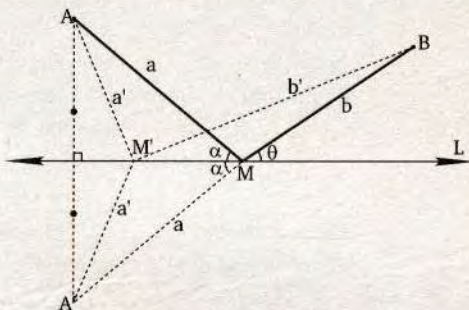
$$(2)(AE) = 1 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{6}} + \sqrt{3 - \sqrt{6}} \sqrt{3} \rightarrow 2(AE) = 3,1423992.....$$

TEOREMA:

En la figura, $M \in L$ y $(AM + MB)$ es la menor posible, entonces $\alpha = \theta$.



DEMOSTRACIÓN:



Se ubica arbitrariamente, el punto M' en $\overline{L}$

Ahora, sea: $AM' = a$ y $M'B = b$

$$\Rightarrow AM' + M'B = a + b$$

Luego, se ubica A' simétrico de A respecto a $\overline{L}$

$$\Rightarrow A'M' = a'$$

Por otro lado, $\overline{A'B} \cap \overline{L} = \{M\}$ y se traza AM .

$$\Rightarrow AM = A'M = a \wedge A'B = a + b$$

Por el teorema de existencia en el $\Delta AM'B$:

$$a + b < a' + b'$$

$$\Rightarrow AM + MB < AM' + M'B$$

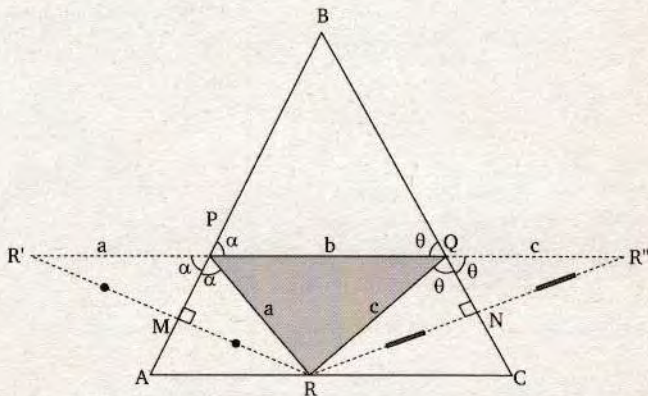
$$\Rightarrow (AM + MB) \text{ es la menor posible.}$$

$$\therefore \alpha = \theta$$

TEOREMA:

En un triángulo acutángulo ABC , se ubican los puntos P, Q y R en $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si el perímetro del triángulo PQR es mínimo, entonces dicho triángulo es el triángulo pedal del triángulo ABC .

DEMOSTRACIÓN:



Sea $PR = a$, $PQ = b$ y $QR = c$

Ahora, por dato: $(a + b + c)$ es mínimo.

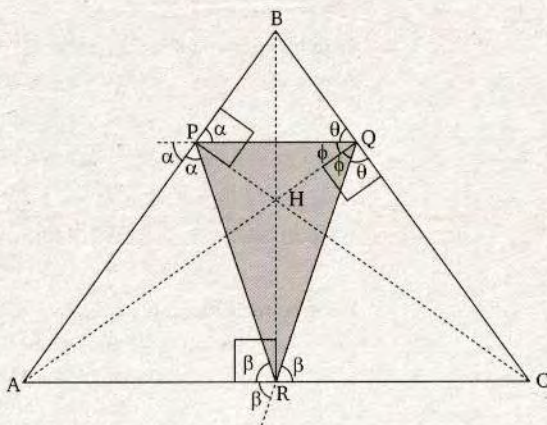
Se ubican R' y R'' simétricos de R respecto a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.

$$\Rightarrow R'P = RP = a \wedge R''Q = RQ = c$$

$\Rightarrow R', P, Q$ y R'' son colineales, pues el dato indica que $(a + b + c)$ es mínimo

En consecuencia: $m\angle MPR = m\angle BQR = \alpha$, $m\angle NQR = m\angle BQP = \theta$.

En forma análoga: $m\angle ARP = m\angle CRQ = \beta$.



A es excentro del $\triangle PQR$.

$\Rightarrow AQ$ es bisectriz interior

$$\Rightarrow \overline{AQ} \perp \overline{BC}$$

Análogamente: $\overline{BR} \perp \overline{AC} \wedge \overline{CP} \perp \overline{AB}$

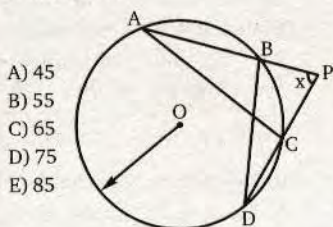
$\therefore$ El $\triangle PQR$ es el triángulo pedal del $\triangle ABC$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuál es la longitud del apotema de un hexágono regular cuyo perímetro es 60?

A) $5\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $8\sqrt{3}$

2. Según la figura, $AC = L_3$ y $BD = L_4$ representan las longitudes de los lados del triángulo equilátero y cuadrado, respectivamente, calcular el valor de x .



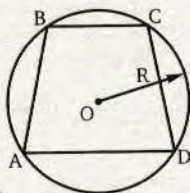
A) 45
B) 55
C) 65
D) 75
E) 85

3. En un polígono regular PQRST....., de n lados. Calcule la medida del ángulo formado por las cuerdas $\overline{PS}$ y $\overline{RT}$.

A) $\frac{720}{n}$ B) $\frac{540}{n}$ C) $\frac{360}{n}$
D) $\frac{180}{n}$ E) $\frac{90}{n}$

4. En la figura, $m\widehat{BC} = 60^\circ$ y $m\widehat{AD} = 120^\circ$. Calcular la longitud de la altura del trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), si O es centro y $R = 2(\sqrt{3} - 1)$

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) $4\sqrt{2}$



5. La longitud del lado de un dodecágono regular ABCDEF..... es $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$. Calcule AE.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

6. El circunradio de un triángulo equilátero mide R. Calcule la longitud del circunradio del dodecágono regular isoperimétrico con el triángulo equilátero.

A) $\frac{R}{4}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ B) $\frac{R}{4}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
C) $\frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
D) $\frac{R}{4}\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$ E) $\frac{R}{4}\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$

7. En un hexágono regular ABCDEF, $AB = a$, M es punto medio de $\overline{EF}$ y CF interseca a $\overline{BM}$ en N. Calcule BN.

A) $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ B) $\frac{a\sqrt{11}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{13}}{3}$
D) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$ E) $\frac{4R}{3}$

8. En una circunferencia se inscriben los polígonos regulares ABCD y BPQ. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overline{AD}$ y $\overline{PQ}$.

A) 15 B) 28 C) 30
D) 40 E) 45

9. En una circunferencia, cuyo radio mide 1, calcular la longitud de la cuerda que subtiende un arco de 135°

A) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
D) $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ E) $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$

10. En un triángulo isósceles ABC, la longitud de la base $\overline{AC}$ es $4\sqrt{2} - \sqrt{2}$. Calcular la longitud de la altura $\overline{AH}$, si $m\angle ABC = 45^\circ$
- A) $2\sqrt{2}$ B) $4 - 2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
 D) $4\sqrt{2}$ E) $8 - 2\sqrt{2}$
11. En un hexágono regular ABCDEF cuyo lado mide 4, calcular la distancia del punto de intersección de las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ a la diagonal $\overline{BD}$.
- A) 0,5 B) 1 C) 2
 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$
12. Calcule el perímetro del triángulo que se forma al unir los puntos medios de tres lados no consecutivos de un hexágono regular de circunradio R.
- A) $\frac{3}{2}R$ B) $2R$ C) $\frac{5}{2}R$
 D) $\frac{7}{2}R$ E) $\frac{9}{2}R$
13. Se tiene un cuadrado cuyo lado mide a. Si a partir de cada vértice se disminuye una cierta longitud X se formará en cada esquina triángulos rectángulos isósceles, que al eliminarlos quedará un polígono de ocho lados. Calcule el valor de X para que el polígono resultante sea regular.
- A) $\frac{a}{2 + \sqrt{2}}$ B) $a + a\sqrt{2}$
 C) $2 + \sqrt{2}a$
 D) $(2 + \sqrt{2})a$ E) $2a + \sqrt{2}$
14. El lado de un hexágono regular ABCDEF mide $\sqrt{5}$, las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EA}$ y $\overline{FB}$ se interceptan formando un segundo hexágono regular. Calcule la longitud del lado de este último hexágono.
- A) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\sqrt{2}$
 D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$
15. En una circunferencia se inscribe un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$) y $BC < AD$. Si $AB = BC = 4$ y la medida del ángulo A es 60° , calcule la longitud de la flecha $\overline{FE}$ de la cuerda $\overline{BC}$.
- A) $2 - \sqrt{3}$ B) $3 - \sqrt{3}$ C) $4 - 2\sqrt{3}$
 D) $5 - \sqrt{3}$ E) $6 - \sqrt{3}$
16. En un triángulo ABC, equilátero, inscrito en una circunferencia de radio R. M y N son puntos medios del arco $\widehat{AB}$ y segmento $\overline{AC}$, respectivamente. Calcule MN.
- A) $\frac{4}{7}R$ B) $\frac{R}{2}\sqrt{7}$ C) $\frac{R}{2}\sqrt{17}$
 D) $R\sqrt{7}$ E) $2R\sqrt{7}$
17. Sea a_p , L_n y R la apotema, la longitud del lado y el circunradio de un polígono regular de n lados, respectivamente. Calcule a_p .
- A) $\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n^2}$ B) $\sqrt{4R^2 - L_n^2}$
 C) $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - L_n^2}$
 D) $\sqrt{2R^2 - L_n^2}$ E) $\sqrt{\frac{4R^2 - L_n^2}{2}}$

18. En una misma circunferencia, la razón del perímetro del hexágono regular inscrito y el perímetro del hexágono regular circunscrito, es de:

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

19. Dado el hexágono regular PQRSTV cuyo lado mide 2, se traza $\overline{QM} \perp \overline{RV}$ y $\overline{QN} \perp \overline{SV}$, calcule MN.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) 3

20. Dado un triángulo isósceles PQR recto en Q, se traza $\overline{QM}$ perpendicular a la bisectriz del ángulo QPR. Si $PR = 4\sqrt{2}$ calcule QM.

A) 1 B) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
C) 2
D) $3\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) 4

21. En un triángulo ABC recto en B, $AB = BC = 2 + \sqrt{2}$. Haciendo centro en A y C y con radio $\overline{AB}$ se trazan arcos que intersecan el lado $\overline{AC}$ en los puntos N y M respectivamente. Calcule MN.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{4}{3}$
D) 2 E) 3

22. En un triángulo ABC, cuyo lado $\overline{AC}$ mide 8. Se trazan las alturas $\overline{AI}$ y $\overline{CF}$. Si $m\angle ABC = 75^\circ$, calcule FI.

A) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ B) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$
C) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$
D) $4\sqrt{2-\sqrt{3}}$ E) 6

23. En una circunferencia cuyo radio mide R, una cuerda que subtiende un arco, cuya medida es 135° . Calcule la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda.

A) $\frac{R}{4}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
C) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $\frac{R}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ E) $\frac{R}{8}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

24. El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia, se trazan la cuerda BE que interseca al lado AC en N tal que: $BN \cong AN \cong NC$, se traza la altura BH y la bisectriz del ángulo ABH que intercepta al lado AC y a la circunferencia en M y D respectivamente. Si $AB = \ell_6$, calcule DE.

A) ℓ_3 B) ℓ_4 C) ℓ_6
D) ℓ_8 E) ℓ_{10}

25. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 4 y uno de sus ángulos mide $82,5^\circ$. Calcule la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

A) $(2-\sqrt{3})$ B) $2(2-\sqrt{3})$
C) 2
D) $(2+\sqrt{3})$ E) $2(2+\sqrt{3})$

26. En un triángulo ABC, $m\angle BAC = 18$, $m\angle ACB = 45$ y $BC = 2(\sqrt{5} - 1)$.
Calcular AB.
- A) $2\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$
27. Sea ABCDRFGH un octágono regular, inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 1. Calcular la longitud de la cuerda EB.
- A) $\sqrt{4 - \sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
D) $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ E) $\sqrt{4 - \sqrt{2}}$
28. En un trapecio ABCD de base $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, $m\angle ABC = 108$ y $m\angle BCD = 144$. Si: Si $CD = \sqrt{5} + 1$, calcular AB.
- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{5}$ E) 5
29. Un cuadrilátero ABCD está inscrito en una circunferencia, tal que $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son los lados de los polígonos regulares de m , n , m y n lados, respectivamente, inscritos en la misma circunferencia. Calcule el valor de $m+n$.
- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 12
30. En un triángulo se cumple que: $m\angle ABC = 67,5$ y $AC = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Si $\overline{AH}$ y $\overline{CF}$ son alturas, calcule FH.
- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 3
31. En un cuadrilátero no convexo ABCD ($\angle ADC$ es obtuso), se cumple que: $AB = BC = CD = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, si $m\angle BAD = \phi$, $m\angle ABC = 6\phi$ y $m\angle BCD = 2\phi$. Calcule AD.
- A) 1 B) 1,5 C) 1,8
D) 2,0 E) 2,5
32. En un dodecágono regular ABCDEF... se circunscribe una circunferencia cuyo radio mide 2. En el arco LR se ubica el punto P. Entonces: $(PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 + (PG)^2 + (PH)^2 + (PI)^2$ es:
- A) 12 B) 24 C) 36
D) 48 E) 60
33. En un pentágono regular ABCDE cuyo lado mide 2, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersectan en P. Calcule PE.
- A) $\sqrt{5} - 1$ B) $\sqrt{5} + 1$
C) $\sqrt{10 - 2\sqrt{25}}$
D) $\sqrt{10 + 2\sqrt{25}}$ E) 1
34. En un triángulo ABC, los ángulos BAC y ACB miden 45 y 30, respectivamente. Si el circunradio del triángulo mide R, calcular AC.
- A) $\frac{R}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ B) $R(\sqrt{6} + \sqrt{5})$
C) $\frac{R}{2}(3 + \sqrt{3})$
D) $\frac{R}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{3})$ E) $\frac{R}{2}(\sqrt{6} + 1)$

35. Sean p y P los perímetros de dos polígonos regulares de n y $2n$ lados, respectivamente, inscritos en una misma circunferencia. Calcular el perímetro del polígono regular de $4n$ lados inscrito en la misma circunferencia

A) $\sqrt{\frac{p^3}{p+P}}$ B) $\sqrt{\frac{2p^3}{p+P}}$ C) $\sqrt{\frac{2p^3}{p+P}}$
D) $\frac{p^2}{2P}$ E) $\sqrt{\frac{3p^3}{p+P}}$

36. En un pentadecágono regular ABCDEFGH.....O. Si $AF = 4\sqrt{3}$, calcular AD.

A) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ B) $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
C) $\sqrt{10-\sqrt{5}}$
D) $2\sqrt{10-\sqrt{5}}$ E) $4\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

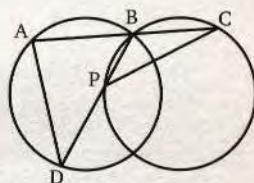
37. En un decágono regular ABCDE..... cuyo circunradio es R , se cumple que $\ell_{10} + R = 5$. Si ℓ_{10} es la longitud del lado del decágono regular, calcular AD.

A) $\sqrt{5}$ B) 5 C) $2\sqrt{5}$
D) 10 E) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

38. En un cuadrado ABCD, se inscribe una circunferencia, siendo los puntos de tangencia M en $\overline{CD}$ y N en $\overline{AD}$. La diagonal $\overline{AC}$ interseca a la circunferencia en los puntos E y F, tal que $E \in \overline{AF}$. Si $AB = 2\sqrt{2}$, calcular la distancia desde N a $\overline{EM}$.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{5-\sqrt{3}}$
D) $\sqrt{7-\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{6-\sqrt{3}}$

39. En la figura, las circunferencias son congruentes, $AB = AD$ y $AC = \sqrt{5} + 1$. Calcular PC, si $\overline{AB}$ es la sección áurea de $\overline{AC}$.



- A) 1
B) 2
C) 4
D) $\sqrt{5}$
E) $2\sqrt{5}$

40. Calcule la longitud del lado del polígono regular de 64 lados, inscrito en una circunferencia de radio R .

A) $R\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
B) $R\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
C) $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$
D) $R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$
E) $R\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}$

41. En un polígono regular ABCDE..... se cumple que: $AC^2 - AB^2 = K^2$. Calcular: AD · BC

A) K^2 B) $\frac{3K^2}{2}$ C) $\frac{3}{4}K^2$
D) $\frac{5}{2}K^2$ E) $3K^2$

42. Calcule la longitud del lado del dodecágono regular circunscrito a una circunferencia, cuyo radio mide $(2 + \sqrt{3})$

A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 4

43. En un triángulo ABC, recto en B, se ubica el punto P interior al triángulo, tal que $m\angle PCA = 16^\circ$ y $PB = 2$. Si: $m\angle BAC = 56^\circ$ y $AC = 2(\sqrt{5} + 1)$, calcular la $m\angle PBC$.

A) 36 B) 38 C) 39
D) 40 E) 41

44. En una misma circunferencia se inscriben los polígonos regulares de n , 4 y $2n$ lados, cuyas longitudes son l_n , l_4 y l_{2n} , respectivamente. Si:

$$l_n^2 = l_4^2 + l_{2n}^2, \text{ calcular el valor de } n.$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 8

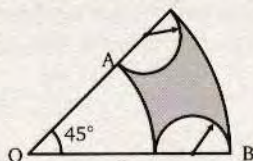
45. En una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 2 se trazan 10 circunferencias congruentes y tangentes exteriores dos a dos, y tangentes interiores a $\mathcal{C}$. Calcular el perímetro del polígono que resulta de unir los centros de las circunferencias congruentes.

A) $10(\sqrt{5} - 2)$ B) $20(\sqrt{5} - 2)$
C) $40(\sqrt{5} - 2)$
D) $60(\sqrt{5} - 2)$ E) $20(\sqrt{5} - 1)$

46. Sobre cada lado de un triángulo equilátero se ubican dos puntos, tales que dividen al lado en tres partes congruentes. Los seis puntos así ubicados forman un hexágono regular inscrito en el triángulo. Si el perímetro del hexágono es P , calcular la longitud del lado del triángulo.

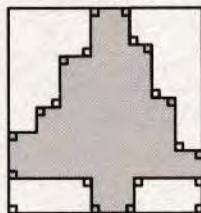
A) $\frac{2P}{3}$ B) $\frac{3P}{2}$ C) $\frac{4P}{3}$
D) $\frac{P}{2}$ E) P

47. Calcular el perímetro de la región sombreada si $OA = 24$ y $OB = 42$.



A) $\frac{59}{2}\pi$ B) $\frac{59}{4}\pi$ C) $\frac{69}{2}\pi$
D) $\frac{69}{4}\pi$ E) 16π

48. En la figura, $AB = 8$ y $AD = 6$. Calcular el perímetro de la región sombreada.



A) 26
B) 28
C) 32
D) 34
E) 36

49. En la figura, haciendo centro en A y B, se han trazado los arcos de circunferencia BC y AT, respectivamente. Si $AB = AC = 2\sqrt{2}$, calcular el perímetro de la región sombreada.

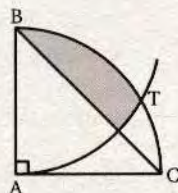
A) $\frac{\sqrt{2}}{3}(5\pi + 12)$

B) $2\sqrt{2}(\pi + 6)$

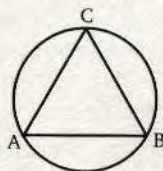
C) $\frac{\sqrt{2}}{6}(5\pi + 10)$

D) $\sqrt{2}(2\pi + 3)$

E) $\frac{\sqrt{2}}{6}(5\pi + 12)$



50. En la figura, $AB = 6$ y $AC = BC = 5$. Calcular la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC .



- A) $\frac{81\pi}{16}$ B) $\frac{17\pi}{3}$ C) $\frac{25\pi}{4}$
D) $\frac{9\pi}{2}$ E) $\frac{17\pi}{4}$
51. Calcule el perímetro de una región triangular cuyos lados tienen longitudes dadas por tres enteros consecutivos, tal que el mayor de sus ángulos es el doble del menor.
- A) 12 B) 14 C) 15
D) 18 E) 20
52. En una circunferencia, se traza la cuerda $\overline{AB}$, tal que $m\angle AOB = 144^\circ$ y $AB = \sqrt{5} + \sqrt{5}$. Calcular la longitud de la circunferencia.
- A) $2\sqrt{2}\pi$ B) $3\sqrt{2}\pi$ C) $4\sqrt{2}\pi$
D) $6\sqrt{2}\pi$ E) $2\sqrt{5}\pi$
53. En un ángulo cuya medida es 60° , se inscriben dos circunferencias tangentes exteriormente. Si la longitud de la circunferencia menor es 1, calcular la longitud de la circunferencia mayor.
- A) 4π B) 6π C) 8π
D) 10π E) 12π

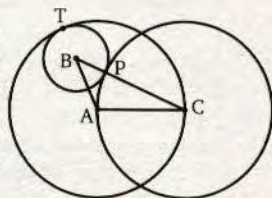
54. En un cuadrado $ABCD$ de centro O , M es punto medio de $\overline{AD}$. Si $AB = 4$, calcular la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo MOC .

- A) $2\pi\sqrt{13}$ B) $2\pi\sqrt{10}$ C) $2\pi\sqrt{7}$
D) $2\pi\sqrt{6}$ E) $\pi\sqrt{5}$

55. En una circunferencia $\mathcal{C}$ se trazan dos cuerdas perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ que se intersecan en Q . Si:
- $$AQ^2 + BQ^2 + QD^2 + QC^2 = 100,$$
- calcule la longitud de $\mathcal{C}$.

- A) 4π B) 5π C) $\frac{15\pi}{2}$
D) 10π E) 20π

56. En la figura, A , B y C son centros de las circunferencias, T y P son puntos de tangencia y $AC = 7$. Calcular el perímetro de la región triangular ABC .



- A) 14
B) 21
C) 22
D) 28
E) 35
57. En un cuadrado $ABCD$, cuyo lado mide ℓ , con centro de cada vértice y radios de longitud ℓ , se trazan arcos determinándose un cuadrilátero curvilíneo interior al cuadrado. Calcular el perímetro del cuadrilátero curvilíneo.

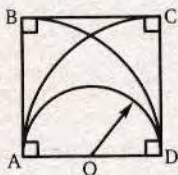
- A) $\frac{2}{9}\pi\ell$ B) $\frac{3}{8}\pi\ell$ C) $\frac{2}{5}\pi\ell$
D) $\frac{3}{4}\pi\ell$ E) $\frac{2}{3}\pi\ell$

58. Calcular el perímetro del dodecágono regular circunscrito a una circunferencia de radio $(2 + \sqrt{3})$.

A) $8\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$
D) 24 E) $16\sqrt{3}$

59. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 6. A y D son centros de los arcos BD y AC. Calcular el perímetro de la región que limitan dichos arcos y la semi-circunferencia de diámetro $\overline{AD}$.

A) 5π
B) 6π
C) 7π
D) 8π
E) 9π



60. En un heptágono regular ABCDEFG, $FC^2 - AC \cdot FC = 16$. Calcular el perímetro del heptágono.

A) 14 B) 20 C) 24
D) 28 E) 32

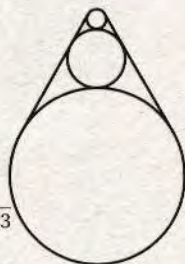
61. En un hexágono regular ABCDEF de centro O, la suma de las distancias de O hacia $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ es $4(\sqrt{3} + 1)$. Calcular el perímetro del hexágono.

A) 44 B) 46 C) 48
D) 60 E) 66

62. En un pentágono de diagonal d, calcular el perímetro.

A) $\frac{5d}{2}(\sqrt{5} - 1)$ B) $d(\sqrt{5} - 1)$
C) $2d(\sqrt{5} - 1)$
D) $d\sqrt{5}$ E) $\frac{5d}{2}$

63. Calcule la longitud de la correa de transición de tres cuerdas tangentes exteriormente, cuyos diámetros miden 42, 14 y $\frac{14}{3}$, respectivamente.



A) $\frac{266\pi}{9} + \frac{112}{3}\sqrt{3}$

B) $\frac{256\pi}{9} + \frac{111}{3}\sqrt{3}$

C) $\frac{266\pi}{3} + \frac{112}{9}\sqrt{3}$

D) $\frac{266\pi}{5} + \frac{112}{3}\sqrt{3}$

E) $\frac{266\pi}{7} + \frac{112}{3}\sqrt{3}$

64. Tres ruedas circulares de radio $\left(\frac{1}{3+\pi}\right)$

son tangentes exteriormente entre sí, calcule la longitud de la faja que manteniéndose tensa, sujeta a estas ruedas.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

65. En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{BH}$, $\overline{AJ}$ y $\overline{CK}$. Desde H se trazan $\overline{HM}$ y $\overline{HN}$ perpendiculares a $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$, respectivamente. Si: $MN = 4\sqrt{3}$, calcular el perímetro del triángulo HJK.

A) $4\sqrt{3}$ B) 6 C) $6\sqrt{3}$
D) 8 E) $8\sqrt{3}$

66. En un octógono regular cuyo circunradio mide $2\sqrt{2}$, calcular el perímetro del polígono que resulta al unir los puntos medios de los lados del octógono regular de manera consecutiva.

A) 8 B) 16
C) $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $16\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $16\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

67. En una circunferencia están inscritos los polígonos regulares de n y $2n$ lados tal que ℓ_n y ℓ_{2n} son las longitudes de los lados, respectivamente.

Si: $\ell_4^2 - \ell_{2n}^2 = \ell_n \ell_3$. Calcular n

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

68. Calcular el lado del polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 5, si se sabe que su apotema es la diferencia del lado del polígono con el radio de la circunferencia circunscrita

A) 7 B) 8 C) 9
D) 6 E) 5

69. ¿En qué relación se encuentran los lados del pentágono regular y decágono regular circunscritos a la misma circunferencia?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$
D) $5\sqrt{5}$ E) $10\sqrt{5}$

70. En un octágono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia, se

ubica el punto medio M del lado $\overline{AB}$ y el punto medio N del arco $\widehat{DE}$. Si $AE = 2R$. Calcular MN.

A) $\frac{R}{2}\sqrt{6+\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$
B) $\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$
C) $\frac{R}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$
D) $\frac{R}{2}\sqrt{6+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$
E) $\frac{R}{2}\sqrt{6+\sqrt{2}+2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$

71. En un triángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O, $m\angle HOC = 135$, $m\angle ABC = 60$ y $HC = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcular la longitud de la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

72. En un octágono regular ABCDEFGH, las diagonales $\overline{BG}$ y $\overline{DH}$ intersecan a la diagonal $\overline{AE}$ en P y Q, respectivamente. Si $AP = 2$, calcular PQ.

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

73. Un hexágono regular ABCDEF, está inscrito en una circunferencia. En el arco AB se ubica el punto P tal que: $PF = a$ y $PC = b$. Calcular PD.

A) $\frac{a+b\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{b+a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a+b}{2}$
D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

74. Calcule la longitud del lado del cuadrado inscrito en un sector circular de 60 y radio R , si dos de sus vértices pertenecen al arco del sector.

A) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$ B) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
 C) $2R\sqrt{3-\sqrt{2}}$
 D) $2R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ E) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$

75. En un decágono regular ABCDEFGHIJ, el lado mide ℓ . Calcular el inradio del triángulo ACE.

A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell}{2}(\sqrt{5}-1)$
 C) $\frac{\ell}{2}(5-\sqrt{5})$
 D) $\frac{\ell}{2}(\sqrt{5}+1)$ E) $\frac{\ell}{2}(5+\sqrt{5})$

76. ABC es un triángulo equilátero, se traza $\overline{BD}$ el simétrico de la altura $\overline{BH}$ con respecto de BC y $AB = L$. Calcular AD.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}L$ B) $\frac{\sqrt{5}}{2}L$ C) $\frac{\sqrt{7}}{2}L$
 D) $\frac{\sqrt{7}}{3}L$ E) $\frac{\sqrt{5}}{3}L$

77. El simétrico del triángulo ABC respecto a la recta que contiene a la bisectriz interior AD es el triángulo $AB'C'$. Si $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$ ($a > c$), calcular $B'C$.

A) $\frac{b+c}{2}$ B) $b-c$ C) $\frac{b-c}{2}$
 D) $\frac{b-c}{4}$ E) $\frac{a+b+c}{4}$

78. En una circunferencia $\mathcal{C}$ de diámetro AB, P es un punto exterior a $\mathcal{C}$, tal que P es el simétrico de A y B respecto a los puntos M y N respectivamente. Si M y N pertenecen a $\mathcal{C}$, calcular la $m\angle APB$.

A) 30 B) 45 C) 60
 D) 75 E) 90

79. ABC es un triángulo rectángulo, se traza la recta L que contiene a la altura relativa a la hipotenusa, luego se traza el triángulo $A'B'C'$ simétrico al triángulo ABC con respecto a L. Si $\overline{BA'}$ es la mediana del triángulo ABC y $AC = 20$, calcule el perímetro del triángulo ABC' .

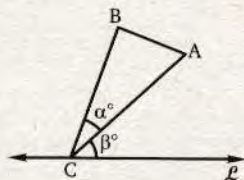
A) $10 + \sqrt{3}$ B) $10(2 + \sqrt{3})$
 C) $10(\sqrt{3} + 1)$
 D) $10(2 + \sqrt{2})$ E) $10(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

80. En un cuadrado ABCD cuyo lado mide 6, M es punto medio de BC y F es el simétrico de D respecto a la recta $\overline{AM}$. Calcular FB.

A) $\sqrt{\frac{72}{5}}$ B) $\sqrt{\frac{115}{3}}$ C) $\sqrt{23}$
 D) $\sqrt{\frac{109}{3}}$ E) $\sqrt{37}$

81. En la figura, $\alpha + 2\beta = 120$, $AC = 5$ y $BC = 3$. Si A' y B' son los simétricos de A y B respecto a $\mathcal{L}$, respectivamente, calcular AB' .

A) $5\sqrt{2}$
 B) $5\sqrt{3}$
 C) $6\sqrt{3}$
 D) 7
 E) $7\sqrt{3}$



82. En la diagonal $\overline{AC}$ de un cuadrado ABCD y en la prolongación de $\overline{AD}$ se ubican los puntos P y E, respectivamente. Si $m\angle CBP = m\angle CEP$, calcular la $m\angle CPE$.

A) 53 B) 60 C) 75
D) 82 E) 90

83. ABCD es un rectángulo ($AB < BC$) y exteriormente se traza el paralelogramo ADEF. Si $m\angle AFE = 30^\circ$ y $BC = 2CD = 2AF = 2a$, determine la distancia entre los centros de simetría del rectángulo y el paralelogramo.

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ B) $\frac{\sqrt{7}}{2}a$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
D) $\frac{\sqrt{5}}{3}a$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

84. ABCDE es un pentágono regular de lado L, AGHCF su simétrico con respecto a la recta $\overline{AC}$, calcular el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero ABCE.

A) $\frac{3L}{4}$ B) $\frac{L}{4}(\sqrt{5} + 1)$
C) $\frac{L}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
D) $\frac{L}{8}(\sqrt{5} + 1)$ E) $\frac{L}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

85. ABCD es un trapecio isósceles, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y $AD > BC$, CTED es el simétrico con respecto de CD. Si $m\angle BAD = 60^\circ$, la altura $\overline{BH}$ del trapecio es congruente a $\overline{BC}$ y $CD = L$. Calcular BT.

A) $\frac{2L}{3}$ B) $\frac{3L}{4}$ C) $\frac{5L}{4}$
D) $\frac{4L}{3}$ E) $\frac{3L}{2}$

86. Se tiene un triángulo equilátero ABC de lado L ($M \in \overline{BC}$), tal que: $BM = 2MC$ y el triángulo $AB'C'$ es el simétrico del triángulo ABC con respecto a la recta $\overline{AM}$. Calcule BC' .

A) $\frac{L}{7}\sqrt{7}$ B) $\frac{2L}{7}\sqrt{7}$ C) $\frac{3\sqrt{7}}{7}L$
D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}L$ E) $\frac{3\sqrt{5}}{5}L$

87. En un hexágono regular ABCDEF, Q es un punto de $\overline{AE}$, tal que Q sea el centro de simetría de los puntos P y D. Si: $AQ = 1$ y $QE = 2$, calcule PB.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{14}$
D) $\sqrt{15}$ E) $2\sqrt{5}$

88. Los puntos A y B pertenecen a un semiplano determinado por la recta ℓ en un plano. Los puntos A y B distan 1,25 y 1,95, respectivamente de la recta ℓ . Si $AB = 2,5$, calcular la longitud de la menor trayectoria recorrida para ir desde el punto A al punto B tocando la recta ℓ .

A) 2,4 B) 3,2 C) 3,6
D) 4 E) 4,2

89. Los polígonos ABCDEF y $A'B'C'D'E'F'$ son dos polígonos regulares simétricos con respecto a $\overline{DF}$. Si $AB = 2$, calcular la distancia de C hacia A' .

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{7}$
D) $2\sqrt{8}$ E) $2\sqrt{10}$

90. En un rectángulo ABCD, se traza la recta ℓ que forma con $\overline{AD}$ un ángulo cuya medida es 30. Si $3AB = 4BC$, calcular la $m\angle MAC'$, siendo $AB'C'D'$ el simétrico de ABCD respecto de ℓ y $\{M\} = \overline{BB'} \cap \ell$.

A) 60 B) 75 C) 87
D) 97 E) 113

91. En un cuadrado ABCD cuyos lados miden ℓ se construye el cuadrado simétrico $AB'C'D'$ con respecto a la recta $\overline{AM}$, siendo M punto medio de $\overline{CD}$. Calcule CD' .

A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3\ell}{2}$
D) $\frac{2\ell}{3}$ E) $\frac{3\ell}{4}$

92. Por el vértice C de un triángulo equilátero ABC se traza la recta ℓ perpendicular a $\overline{BC}$. Si $CB'A'$ es el simétrico de CBA respecto de ℓ y $AB=4$, calcular MB' (siendo M el punto medio de $\overline{AB}$).

A) $2\sqrt{13}$ B) $3\sqrt{13}$ C) $4\sqrt{13}$
D) $5\sqrt{13}$ E) $6\sqrt{13}$

93. En un rectángulo ABCD, las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ están en la relación de 1 a 2. Sea $AB'CD'$ el simétrico de ABCD con respecto a $\overline{AC}$, tal que $\overline{BC} \cap \overline{AD'} = \{E\}$. Calcular la relación de las longitudes de ED' y $\overline{AB}$.

A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{3}{5}$ E) 1

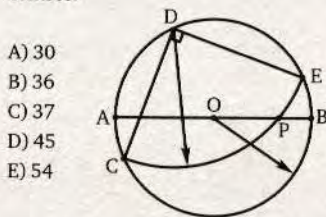
94. En un pentágono regular ABCDE, por el vértice C se traza la recta L perpendicular a DE, tal que $AB'CD'E'$ es el simétrico del pentágono regular respecto a L. Si el perímetro del polígono $EBB'E'$ es $(7 + \sqrt{5})$, calcular AE' .

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt{5} - 1$
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7} - 1$

95. En un rombo ABCD cuyo lado mide a y $AC = a$, se traza el polígono simétrico $BCD'A'$. Si $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ y $\overline{CA'} \cap \overline{BD'} = N$, calcular MN.

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

96. Calcular la $m\widehat{BE}$, si $\overline{OP}$ es la sección áurea de $\overline{OA}$. Además, O y D son centros.



A) 30
B) 36
C) 37
D) 45
E) 54

97. En un pentágono regular ABCDE, $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{T\}$. Si $BT = a$, calcular la longitud de la circunferencia circuncrita al triángulo ATE.

A) πa B) $2\pi a$
C) $3\pi a$
D) $\pi a(\sqrt{5} - 1)$ E) $2\pi a\sqrt{2}$

98. Sean las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ secantes en M y N, donde O es el centro de $\mathcal{C}_2$ (O en $\mathcal{C}_1$), las cuerdas $\overline{OA}$ y $\overline{MB}$ se intersectan en un punto de $\mathcal{C}_2$.

$$\widehat{\text{Sim NB}} = 36^\circ \text{ y } AB = \sqrt{5} + 1,$$

calcular la longitud del radio de la circunferencia $\mathcal{C}_1$.

- A) $3 - \sqrt{5}$ B) $3 + \sqrt{5}$ C) $2 + \sqrt{5}$
D) $1 + \sqrt{5}$ E) $2(\sqrt{5} - 1)$

99. El lado de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio R mide L_n . Calcular la longitud del lado del polígono regular de n lados circunscrito a la misma circunferencia.

- A) $\frac{RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$ B) $\frac{2RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$
C) $\frac{2RL_n}{\sqrt{4R^2 + L_n^2}}$
D) $\frac{4RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$ E) $\frac{RL_n}{\sqrt{4R^2 + L_n^2}}$

100. Sean a_{2n} y a_n las longitudes de los apotemas de los polígonos regulares de $2n$ y n lados, respectivamente, inscritos en la misma circunferencia cuyo radio es R . Calcular a_{2n} en función de a_n y R .

- A) $\sqrt{2R^2 + a_n R}$
B) $\sqrt{2R^2 + 2a_n R}$
C) $\sqrt{2R^2 - 2a_n R}$
D) $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2a_n R}$
E) $\frac{1}{4}\sqrt{2R^2 + 2a_n R}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**Resolución 1:**

Piden :

$$ap_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \dots\dots(I)$$

Dato :

$$2p_{\text{Hexágono}} = 60$$

$$\Rightarrow 6L_6 = 60$$

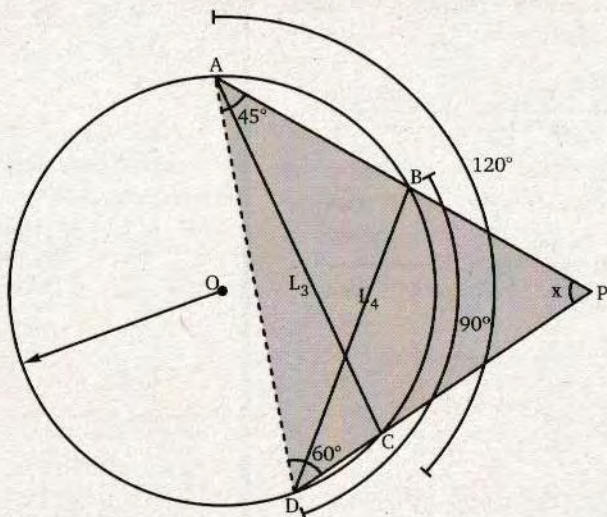
$$\Rightarrow 6.R = 60$$

$$\Rightarrow R = 10 \dots\dots(II)$$

(II) en (I) :

$$ap_6 = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore ap_6 = 5\sqrt{3}$$

Rpta.: A**Resolución 2:**

Piden: x

Datos :

$$AC = L_3 \Rightarrow m\widehat{ABC} = \frac{360}{3} = 120$$

$$BD = L_4 \Rightarrow m\widehat{BCD} = \frac{360}{4} = 90$$

Ahora, se traza $\overline{AD}$ y por $\angle$ inscrito:

$$m\angle ADC = 60, \text{ pues } m\angle ADC = \frac{m\widehat{ABC}}{2}$$

Análogamente, $m\angle BAD = 45$

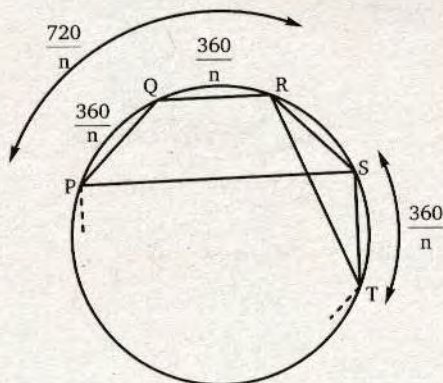
Finalmente, en el ΔAPD :

$$45 + 60 + x = 180$$

$$\therefore x = 75^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 3:



Por propiedad:

$$m\widehat{ST} = \frac{360}{n}$$

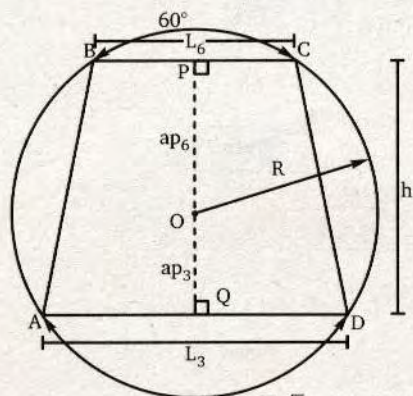
Luego por $\angle$ interior:

$$x = \frac{\frac{720}{n} + \frac{360}{n}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{540}{n}$$

Rpta.: B

Resolución 4:



Por dato:

$$R = 2(\sqrt{3} - 1) \dots\dots(I)$$

$$m\widehat{BC} = 60 \wedge m\widehat{AD} = 120$$

$$\Rightarrow BC = L_6 \wedge AD = L_3$$

En consecuencia:

$$OP = ap_6 \wedge OQ = ap_3$$

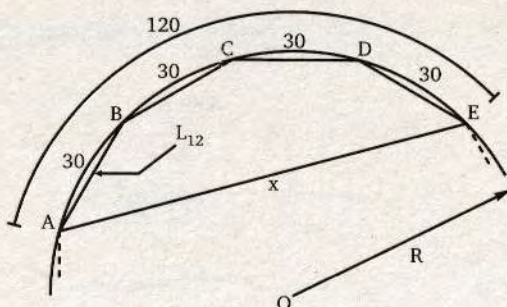
$$\Rightarrow \text{Piden : } h = ap_6 + ap_3$$

$$\Rightarrow h = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{3} + 1) \dots\dots II$$

$$\text{Reemplazando I en II: } h = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore h = 2$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13**Resolución 5:**

Piden :

$$AE = x$$

$$\Rightarrow x = L_3, \text{ pues } m\widehat{AE} = 120$$

$$\Rightarrow x = R\sqrt{3} \quad \dots\dots(I)$$

Luego, por dato :

$$L_{12} = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{3}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{3} \quad \dots\dots(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: C**Resolución 6:**Piden: R' (Circunradio del dodecágono regular).Por dato, el circunradio del Δ equilátero mide R y

$$2p_{\text{Dodecágono}} = 2p_{\text{equilátero}}$$

$$\Rightarrow 12L_{12} = 3L_3$$

$$\Rightarrow 12R'\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 3R\sqrt{3}$$

$$\therefore R' = \frac{R}{4}\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}$$

Rpta.: D

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Piden: x (medida del ángulo determinado por $\overline{AD}$ y $\overline{PQ}$).

Ahora, $AB = BC = CD = L_4$

$$\Rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = \frac{360}{4} = 90$$

También, $BQ = BP = L_3$

$$\Rightarrow m\widehat{BQ} = m\widehat{BP} = \frac{360}{3} = 120$$

En consecuencia: $m\widehat{AQ} = 30 \wedge m\widehat{PD} = 60$

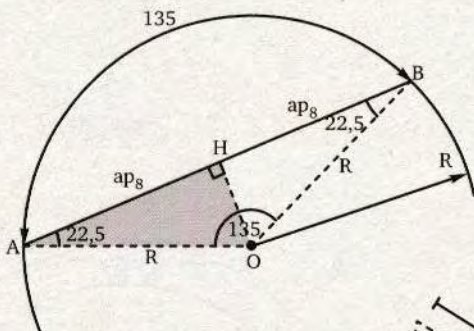
Finalmente, por $\angle$ interior:

$$x = \frac{30 + 60}{2}$$

$$\therefore x = 45$$

Rpta.: E

Resolución 9:



Piden: AB

Dato : $\widehat{mAB} = 135^\circ \wedge R = 1 \dots\dots(I)$

Ahora, se traza $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OH} \perp \overline{AB}$.

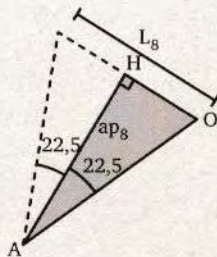
$$\Rightarrow AB = 2ap_8$$

$$\Rightarrow AB = 2 \cdot \left(\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow AB = R\sqrt{2+\sqrt{2}} \dots\dots(\text{II})$$

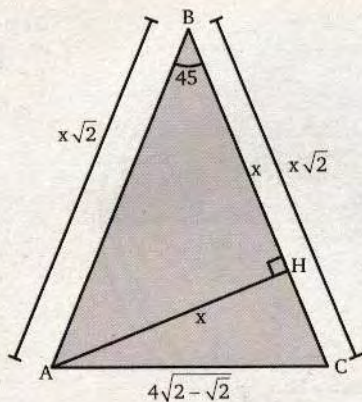
Reemplazando (I) en (II):

$$\therefore AB = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$



Rpta.: B

Resolución 10:



Piden : $AH = x$

Dato : $AC = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ Del gráfico:

$AC = L_g$, pues $m\angle ABC = 45$

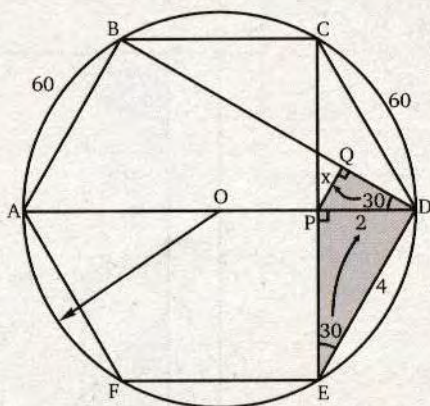
$$\Rightarrow 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{2-\sqrt{2}} = (x\sqrt{2})\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: A

Resolución 11:



Piden : $PQ = x$

Por $\angle$ inscrito: $m\angle ADB = m\angle CED = 30$

Luego, en $\triangle EPD$ notable de 30 y 60:

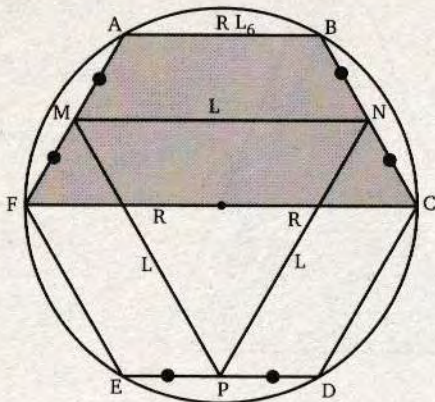
$$PD = 2$$

Análogamente, en $\triangle PQD$:

$$\therefore x = 1$$

Rpta.: B

Resolución 12:



Piden:

$$\text{Perímetro}_{\triangle MNP} = 3L$$

Del gráfico:

$$AB = L_6 = R$$

Luego: MN es la mediana

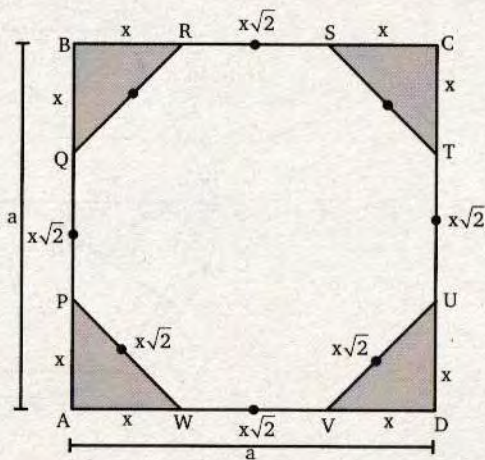
del trapecio FABC

$$\Rightarrow L = \frac{2R + R}{2} = \frac{3R}{2}$$

$$\therefore 3L = \frac{9R}{2}$$

Rpta.: E

Resolución 13:



Del gráfico:

PQRSTUVWXYZ es un octágono regular.

Por dato:

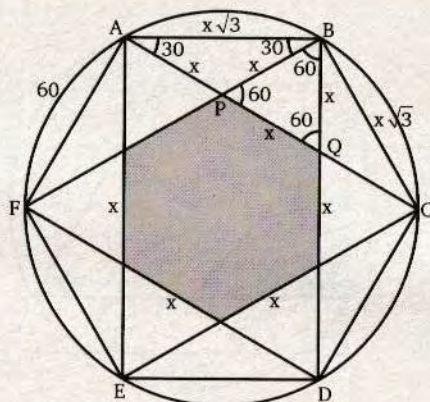
$$AB = a$$

$$\Rightarrow x + x + x\sqrt{2} = a$$

$$\therefore x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$$

Rpta.: A

Resolución 14:



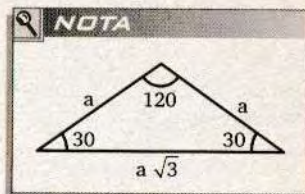
Se prueba que el ΔPBQ es equilátero:

$\Rightarrow$ Por propiedad, en ΔAPB

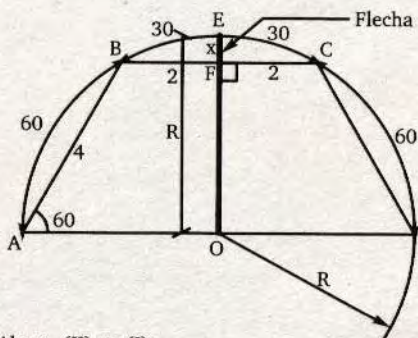
$$\frac{AB}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Rpta.: B



Resolución 15:



Piden : $FE = x$

Luego : $OF = ap_6$,

pues $m\widehat{BC} = 60$

$$\Rightarrow x = R - \underbrace{ap_6}_{\frac{R\sqrt{3}}{2}} \dots\dots(I)$$

Por otro lado : $AB = L_6 = R$

Del dato : $AB = 4$

$$\Rightarrow R = 4 \dots\dots(II)$$

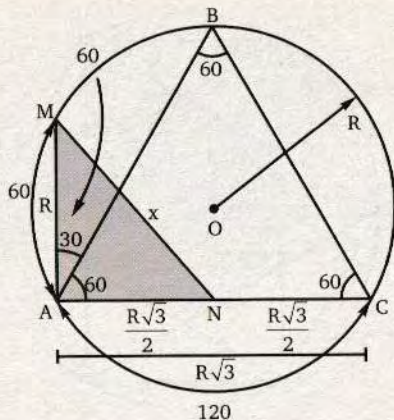
Ahora, (II) en (I):

$$\Rightarrow x = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = 4 - 2\sqrt{3}$$

Rpta.: C

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 16:

$$\therefore x = \frac{R\sqrt{7}}{2}$$

Rpta.: B

$$\text{Piden : MN} = x$$

Por dato: M es punto medio

del arco $\widehat{AB}$, y N de $\overline{AC}$.

$$\Rightarrow m\widehat{AM} = m\widehat{BM} = 60$$

$$\Rightarrow AM = L_6 = R$$

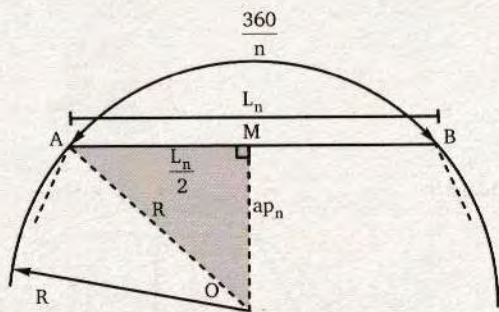
También : $AN = NC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$,

pues $AC = L_3 = R\sqrt{3}$

Luego, en el $\triangle MAN$:

$$x^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Resolución 17:


$$\text{Sea : AB} = L_n$$

Luego, se trazan $\overline{OA}$ y $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

$$\Rightarrow OA = R \quad \wedge \quad OM = ap_n$$

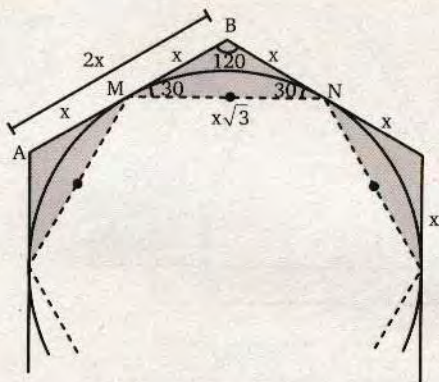
$\Rightarrow$ Por el teorema de Pitágoras:

$$ap_n^2 + \left(\frac{L_n}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\therefore ap_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L_n^2}$$

Rpta.: A

Resolución 18:



Sea : $AB = 2x$

$\Rightarrow AM = MB = x$

Luego, en el $\triangle MBN$:

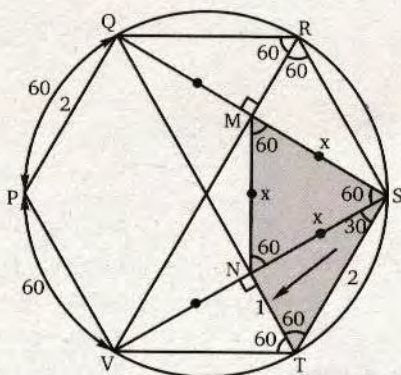
$MN = x\sqrt{3}$

Finalmente, piden:

$$\therefore \frac{6x\sqrt{3}}{6 \cdot 2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rpta.: C

Resolución 19:



Piden : $MN = x$

$\Rightarrow$ Del gráfico:

$m\widehat{VQ} = 120$

$\Rightarrow m\angle QSV = 60$

$\Rightarrow \triangle MSN$ es equilátero.

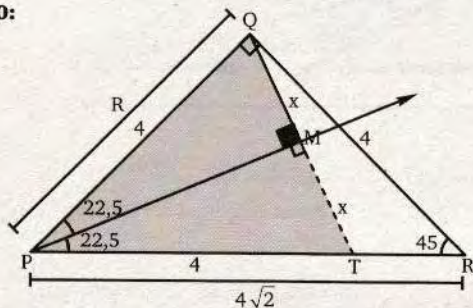
Luego, en $\triangle SNT$:

Notable de 30 y 60.

$\therefore x = \sqrt{3}$

Rpta.: C

Resolución 20:



Piden : $QM = x$

Por dato:

$PR = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow PQ = 4$

$\Rightarrow$ En el $\triangle TPQ$: isósceles.

$2x = L_g$, pues TPQ es el triángulo elemental del octógono regular.

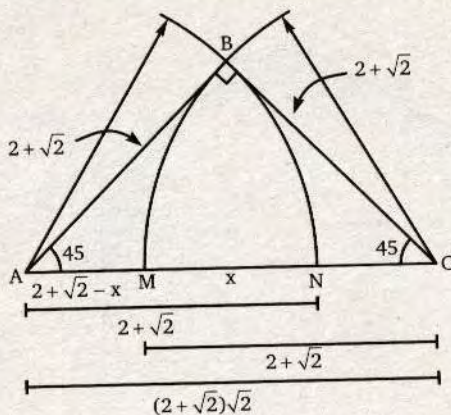
$$\Rightarrow 2x = R\sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ (por fórmula)} \Rightarrow 2x = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 21:



Piden : $MN = x$

Por dato : $AB = BC = 2 + \sqrt{2}$

$$\Rightarrow AC = (2 + \sqrt{2})\sqrt{2}$$

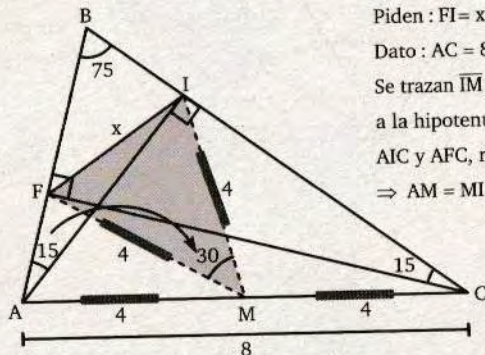
También : $AC = AM + MC$

$$\Rightarrow (2 + \sqrt{2})\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2} - x) + (2 + \sqrt{2})$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: D

Resolución 22:



Piden : $FI = x$

Dato : $AC = 8$

Se trazan $\overline{IM}$ y $\overline{FM}$ medianas relativas a la hipotenusa $\overline{AC}$ en los triángulos

AIC y AFC , respectivamente:

$$\Rightarrow AM = MI = MF = MC = 4$$

Por propiedad: $m\angle FMI = 30$

Luego, el ΔFMI es el triángulo elemental del dodecágono regular con circunradio $R = 4$.

$$\Rightarrow x = L_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad (\text{Por fórmula})$$

$$\therefore x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Rpta.: D

Ahora, en el problema se traza $\overline{BM}$ mediana relativa a $\overline{AC}$ en el $\triangle ABC$.

En consecuencia: $AM = MB = MC = 2$

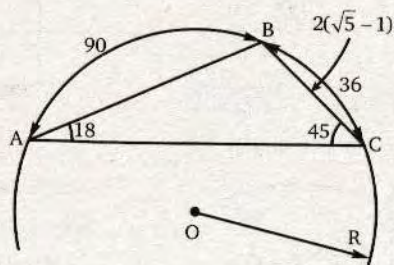
$$\Rightarrow m\angle BMA = 15$$

En el $\triangle BMH$: $x = \frac{L_{12}}{2} = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ (Con circunradio $R = 2$)

$$\therefore x = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Rpta.: A

Resolución 26:



Piden: AB

Dato : $BC = 2(\sqrt{5} - 1)$

Por ángulo inscrito:

$$m\widehat{AB} = 90$$

$$\Rightarrow AB = L_4 = R\sqrt{2} \dots\dots(I)$$

Tambien : $m \widehat{BC} = 36$

$$\Rightarrow BC = L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

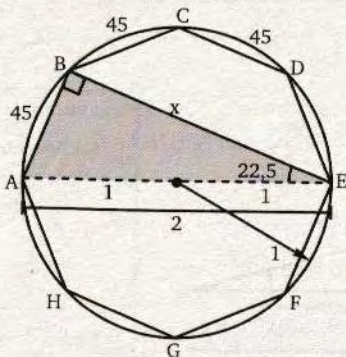
Del dato: $2(\sqrt{5}-1) = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

$$\Rightarrow R = 4 \quad \dots\dots (II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\therefore AB = 4\sqrt{2}$$

Rpta.: B

Resolución 27:
$$\text{Piden : BE} = x$$

Ahora, se traza $\overline{AE}$

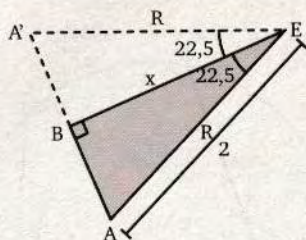
⇒ Por ángulo inscrito:

$$m\angle AEB = \frac{45}{2} = 22,5$$

$\wedge AE = 2$

Luego, en el $\triangle ABE$:

$$x = ap_8 = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

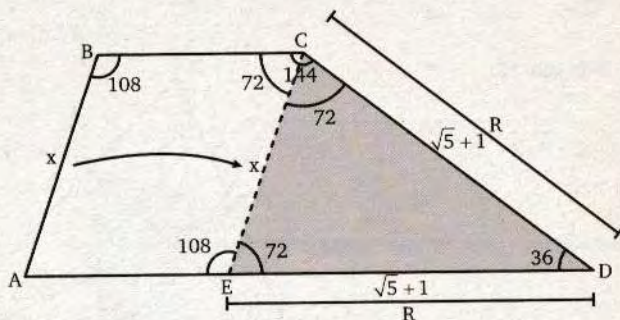


$$\Rightarrow x = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \frac{2}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\therefore x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Rpta.: B

Resolución 28:



Piden : $AB = x$

Por dato, ABCD es un trapecio.

$\Rightarrow$ Se sugiere trazar $CE \parallel AB$, pues así, ABCE es un paralelogramo.

Luego:

$$CE = x \wedge m\angle CED = m\angle ECD = 72$$

$$\Rightarrow m\angle C = 36 \wedge CD = ED = \sqrt{5} + 1$$

$$(\text{Del otro dato, } CD = \sqrt{5} + 1)$$

En consecuencia, DCE es el triángulo elemental del decágono regular con circunradio:

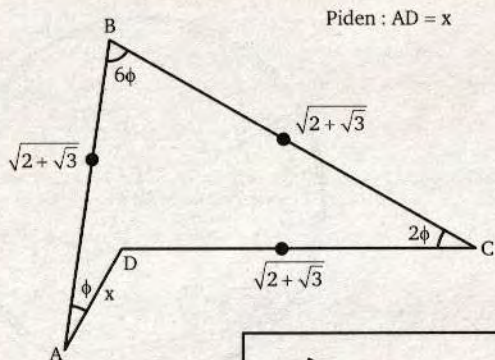
$$R = \sqrt{5} + 1$$

$$\Rightarrow x = L_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

$$\therefore x = \frac{(\sqrt{5} + 1)}{2} (\sqrt{5} - 1) = 2$$

Rpta.: B

Resolución 31:

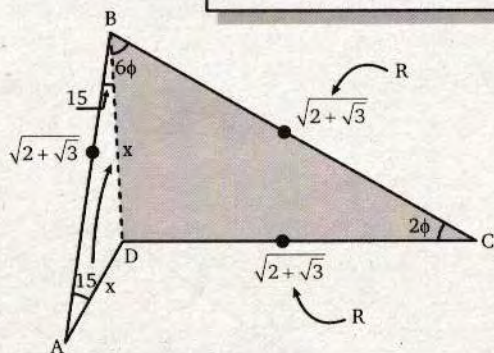
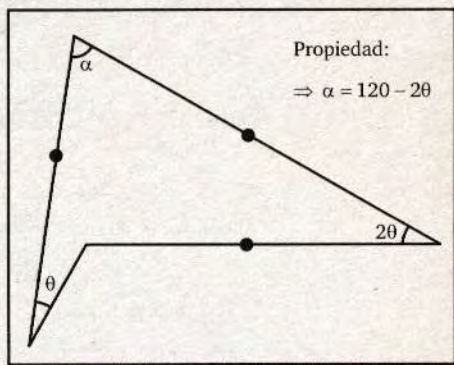


En el problema :

$$6\phi = 120 - 2\phi$$

$$\Rightarrow \phi = 15$$

Reemplazando $\phi = 15$
en la figura:



Ahora, el $\triangle BCD$ es el triángulo elemental del dodecágono regular:

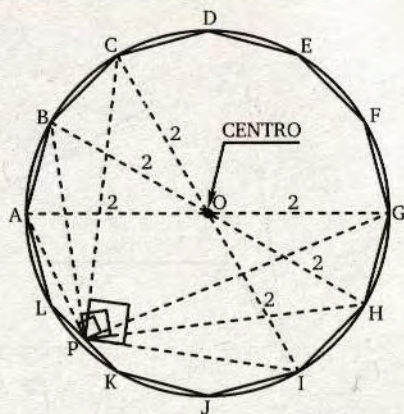
$$\Rightarrow x = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = 1$$

Rpta.: A

Resolución 32:



Piden :

$$T = PA^2 + PB^2 + PC^2 + PG^2 + PH^2 + PI^2$$

$$\Rightarrow T = PA^2 + PG^2 + PB^2 + PH^2 + PC^2 + PI^2 \dots\dots(I)$$

Ahora, por el Teorema de Pitágoras:

$$PA^2 + PG^2 = PB^2 + PH^2 = PC^2 + PI^2 = 4^2 \dots\dots(II)$$

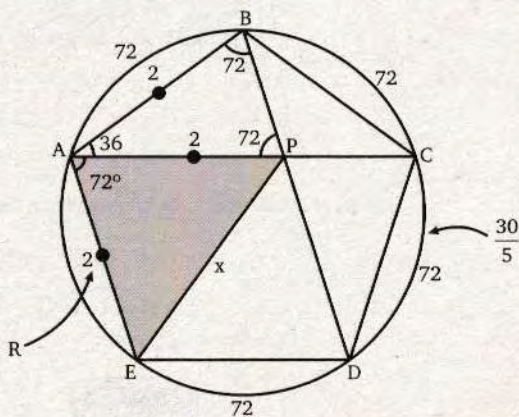
Reemplazando (II) en (I):

$$\Rightarrow T = 4^2 + 4^2 + 4^2$$

$$\therefore T = 48$$

Rpta.: D

Resolución 33:



Piden : $EP = x$

Se prueba, fácilmente, que el ΔBAP es isósceles.

Entonces: $AB = AP = 2$

En consecuencia: $AE = AP = 2$

Luego, el ΔEAP es el triángulo elemental del pentágono regular, con circunradio

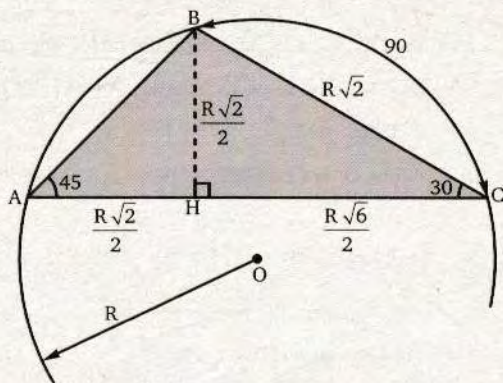
$$R = 2. \quad \Rightarrow x = L_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad (\text{Fórmula})$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$\therefore x = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Rpta.: C

Resolución 34:



Piden: AC

Del gráfico: $m\widehat{BC} = 90 \Rightarrow BC = L_4$

$$\Rightarrow BC = R\sqrt{2} \quad (\text{Fórmula}).$$

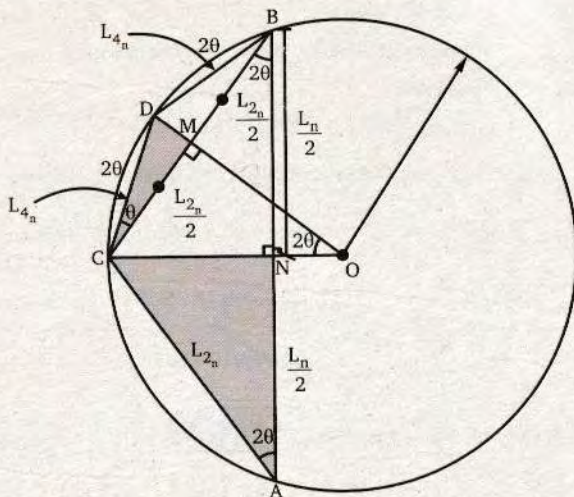
Ahora, se traza la altura $\overline{BH}$.

$$\Rightarrow BH = HA = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad \wedge \quad HC = \frac{R\sqrt{6}}{2}$$

$$\therefore AC = \frac{R}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

Rpta.: A

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 35:

Sean L_n , L_{2n} y L_{4n} las longitudes de los lados de los polígonos regulares de n , $2n$ y $4n$ lados, respectivamente, y $AB = L_n$.

$$\Rightarrow \text{Piden: } 4n.L_{4n}$$

Ahora, en la figura se construye L_{4n} y L_{2n} a partir de L_n .

$$\Rightarrow \text{En} \triangle \text{CMD} : \quad \cos \theta = \frac{\frac{L_{2n}}{2}}{\frac{L_{4n}}{2}} = \frac{L_{2n}}{2L_{4n}} \dots\dots(\alpha)$$

También, en $\triangle BNC$: $\cos 2\theta = \frac{\frac{L_n}{2}}{L_{2n}} \Rightarrow 2\cos^2 - 1 = \frac{L_n}{2L_{2n}}$

$$\text{De}(\alpha): \quad 2\left(\frac{L_{2n}}{2L_{4n}}\right)^2 - 1 = \frac{L_n}{2L_{2n}} \Rightarrow L_{4n} = \sqrt{\frac{L_{2n}^3}{L_n}}$$

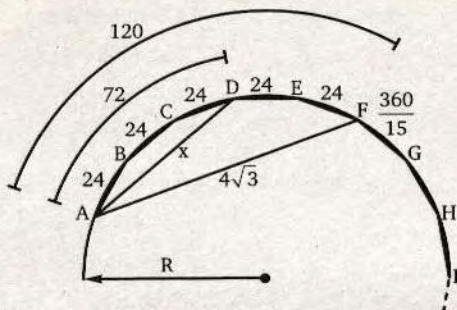
Pero : $p = nL_n \wedge P = 2nL_{2n}$

$$\Rightarrow L_{4n} = \frac{\left(\frac{P}{2n}\right)^3}{\left(\frac{P}{n}\right) + \left(\frac{P}{n}\right)} \Rightarrow L_{4n} = \frac{1}{4n} \sqrt{\frac{2P^3}{P+P}}$$

$$\therefore n.L_{4n} = \sqrt{\frac{2P^3}{p+P}}$$

Rpta.: B

Resolución 36:



Piden : $AD = x \Rightarrow x = L_5$, pues $m\widehat{AD} = 72$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \dots\dots(I)$$

Por otro lado, $m\widehat{AF} = 120$

$$\Rightarrow AF = L_3 \Rightarrow 4\sqrt{3} = R\sqrt{3}$$

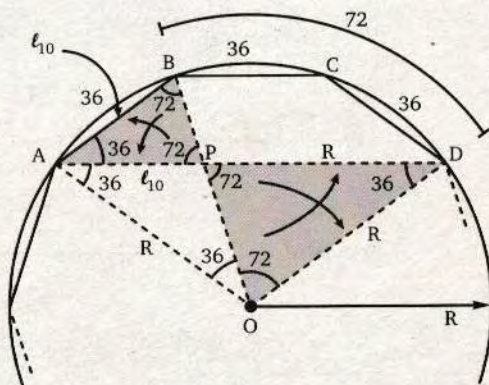
$$\Rightarrow R = 4 \dots\dots(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\therefore x = 2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Rpta.: B

Resolución 37:



Piden: AD

Por dato: $l_{10} + R = 5$

Del gráfico: $m\widehat{AB} = m\widehat{BC} = m\widehat{CD} = 36$

Por ángulo central: $m\angle AOB = 36 \wedge m\angle BOD = 72$

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

En consecuencia, en el ΔAOD isósceles:

$$m\angle OAD = m\angle ODA = 36$$

Luego:

$$m\angle OPD = R$$

$$\Rightarrow PD = DO = R$$

En forma análoga, se prueba fácilmente que:

$$m\angle ABP = \angle APB = 72$$

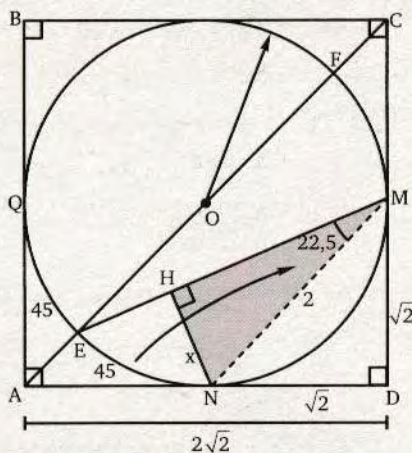
$$\Rightarrow BA = AP = \ell_{10}$$

Finalmente, se observa: $AD = \ell_{10} + R$

$$\text{Del dato: } 5 = \ell_{10} + R \quad \therefore AD = 5$$

Rpta.: B

Resolución 38:



Piden: $NH = x$

$$\text{Dato: } AB = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow ND = DM = \sqrt{2} \wedge NM = 2$$

Ahora, por propiedad de la circunferencia:

$$m\angle QAN + m\widehat{QN} = 180$$

$$\Rightarrow m\widehat{QN} = 90$$

En consecuencia,

$$m\angle EMN = 22,5, \text{ pues}$$

$$m\angle EMN = \frac{m\widehat{EN}}{2}$$

(ángulo inscrito).

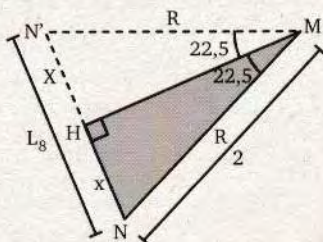
$$\Rightarrow \text{En } \triangle MHN: \quad x = \frac{L_8}{2}, \text{ con circunradio } R = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

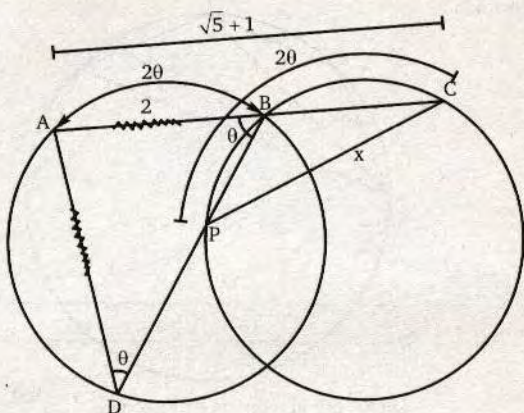
$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = \sqrt{2} - \sqrt{2}$$

Rpta.: A



Resolución 39:



Piden : $PC = x$

Datos : $AB = AD, AC = \sqrt{5} + 1,$

$\widehat{AB}$ es la sección áurea de $\widehat{AC}$ y las circunferencias son congruentes.

$$\Rightarrow AB = \frac{AC(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} = 2$$

Ahora, sea : $m\widehat{AB} = 2\theta \Rightarrow m\angle ADB = \theta$

En el $\triangle DAB$ isósceles:

$$m\angle ABD = \theta$$

Luego, por ángulo exinscrito:

$$m\widehat{PBC} = 2\theta$$

En consecuencia: $\therefore x = 2$, pues $m\widehat{AB} = m\widehat{PBC} = 2\theta$ y las circunferencias son congruentes.

Rpta.: B

Resolución 40:

Piden: L_{64}

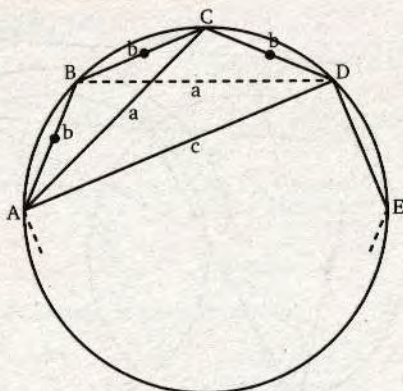
Dato: Circunradio = R .

$$\text{Ahora, por propiedad: } L_{2^n} = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \text{ (n-1) radicales}}$$

$$\text{En el problema: } \therefore L_{64} = L_{2^6} = R \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \text{ 5 Radicales}}$$

Rpta.: D

Resolución 41:

Sean : $AC = a$, $AB = b$ $\wedge$ $AD = c$

Por dato:

$$a^2 - b^2 = k^2 \quad \dots\dots(I)$$

Piden: cb Ahora, se traza $\overline{BD}$

$\Rightarrow BD = a$, pues $ABCD$ es un
trapezio isósceles

Luego, por el teorema de Ptolomeo

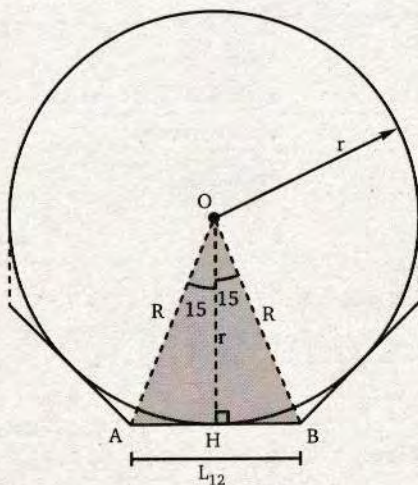
$$\begin{aligned} a \cdot a &= b \cdot b + c \cdot b \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= cb \quad \dots\dots(II) \end{aligned}$$

Reemplazando (I) en (II):

$$\therefore k^2 = cb$$

Rpta.: A

Resolución 42:

Piden : L_{12} (con circunradio R)

$$\Rightarrow L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \dots\dots(I)$$

Por dato : $r = 2 + \sqrt{3}$

$$\Rightarrow r = ap_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2 + \sqrt{3} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

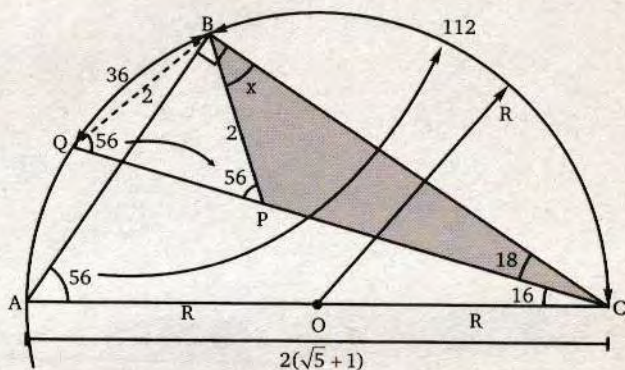
$$\Rightarrow R = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \dots\dots(II)$$

Reemplazando (II) en (I):

$$\begin{aligned} L_{12} &= 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} \\ \therefore L_{12} &= 2 \end{aligned}$$

Rpta.: A

Resolución 43:



Piden : $m\angle PBC = x$

Por dato : $PB = 2 \wedge AC = 2(\sqrt{5} + 1)$

$$\Rightarrow R = \sqrt{5} + 1$$

Ahora, en C: $m\angle BCP = 18$

Luego, se prolonga $\overline{CP}$ hasta Q.

$$\Rightarrow \text{Por ángulo inscrito: } m\angle BQP = \frac{112}{2} = 56$$

También: $m\widehat{BQ} = 36$

$$\Rightarrow QB = L_{10}, \text{ con circunradio } R = \sqrt{5} + 1$$

$$\Rightarrow QB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)(\sqrt{5} - 1) = 2$$

En consecuencia, el $\triangle QBP$ es isósceles, pues del otro dato, $PB = 2$.

$$\Rightarrow m\angle BPQ = 56$$

Finalmente, en el $\triangle BPC$:

$$x + 18 = 56$$

$$\therefore x = 38$$

Rpta.: B

Resolución 44:

Piden: n

$$\text{Por dato: } \ell_n^2 = \ell_4^2 + \ell_{2n}^2$$

$$\Rightarrow \ell_n^2 = 2R^2 + \ell_{2n}^2, \text{ pues } \ell_4 = R\sqrt{2}$$

Sin embargo, por propiedad:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

$$\Rightarrow \ell_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}$$

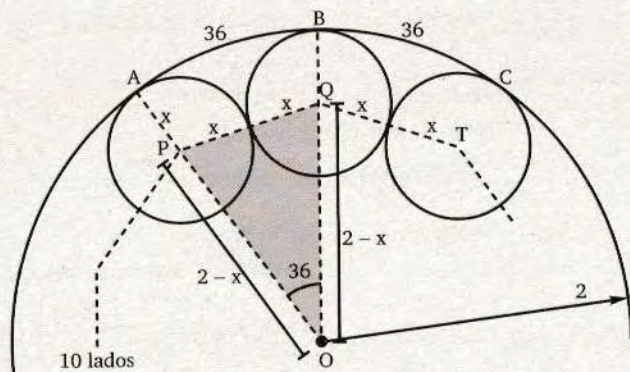
BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Pero, del dato:

$$\begin{aligned}
 \ell_{2n}^2 &= \ell_n^2 - 2R^2 \\
 \Rightarrow \ell_n^2 - 2R^2 &= 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2} \\
 \Rightarrow R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2} &= 4R^2 - \ell_n^2 \\
 \Rightarrow R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2} &= \sqrt{(4R^2 - \ell_n^2)^2} \\
 \Rightarrow R &= \sqrt{4R^2 - \ell_n^2}
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
 \ell_n &= R\sqrt{3} \\
 \therefore n &= 3
 \end{aligned}$$

Rpta.: A**Resolución 45:**Por dato, se tiene 10 circunferencias tangentes a $\mathcal{C}$ en los puntos A, B, C, ...

$$\Rightarrow m\angle AOB = \frac{360}{10} = 36$$

Piden :

$$2p_{\text{Decágono } PQTL} = 10(2x) = 20x$$

Por otro lado, el ΔPOQ es el triángulo elemental del decágono regular, con circunradio $R = 2 - x$.

$$\Rightarrow 2x = L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

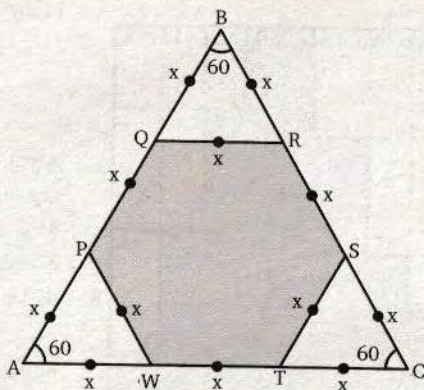
$$\Rightarrow 2x = \frac{(2-x)}{2}(\sqrt{5} - 2)$$

$$\Rightarrow x = 2(\sqrt{5} - 2)$$

$$\therefore 20x = 40(\sqrt{5} - 2)$$

Rpta.: C

Resolución 46:



Sea : $BQ = x$

Piden:

$AB = 3x$

Por dato:

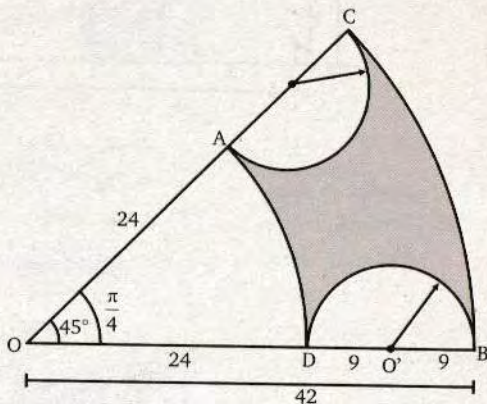
$2p_{PQRSTW} = P$

$\Rightarrow 6x = P$

$\therefore 3x = \frac{P}{2}$

Rpta.: D

Resolución 47:



Piden : $L_{\widehat{AD}} + L_{\widehat{CB}} + L_{\widehat{AC}} + L_{\widehat{DB}}$

Dato : $OA = 24 \wedge OB = 42$

$\Rightarrow DO' = O'B = 9$

Luego :

$L_{\widehat{AD}} = \frac{\pi}{4} \cdot 24 = 6\pi$

$L_{\widehat{CB}} = \frac{\pi}{4} \cdot 42 = \frac{21\pi}{2}$

$L_{\widehat{AC}} = L_{\widehat{DB}} = \pi \cdot 9$

Finalmente :

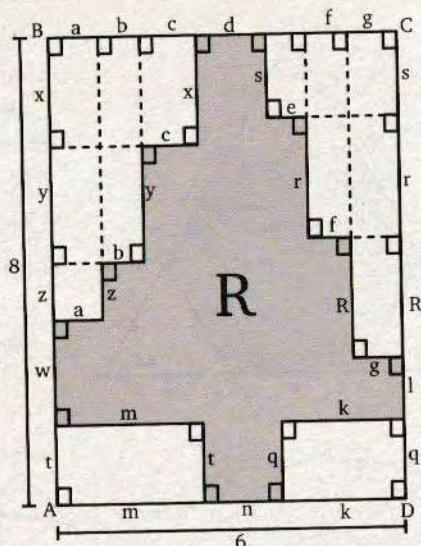
$L_{\widehat{AD}} + L_{\widehat{CB}} + L_{\widehat{AC}} + L_{\widehat{DB}} = 6\pi + \frac{21\pi}{2} + 9\pi + 9\pi$

$\therefore L_{\widehat{AD}} + L_{\widehat{CB}} + L_{\widehat{AC}} + L_{\widehat{DB}} = \frac{69\pi}{2}$

Rpta.: C

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 48:



Piden : $2p_R \rightarrow$ Perímetro
de la región R

Dato : $AB = 8 \wedge AD = 6$

Ahora, del gráfico se observa que la suma de las verticales de la región R en la parte izquierda representa la longitud de $\overline{AB}$.

En forma análoga, se analiza la parte de la derecha y las horizontales superior e inferior de la región R.

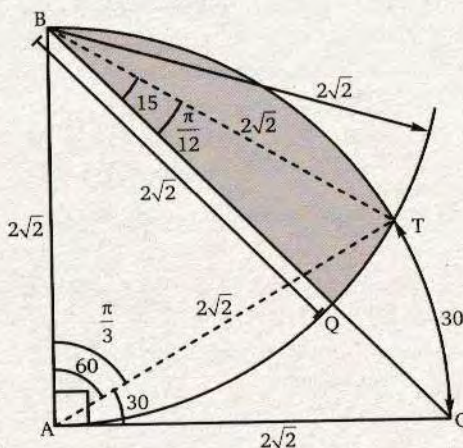
$$\Rightarrow 2p_R = AB + CD + BC + AD$$

$$\Rightarrow 2p_R = 8 + 8 + 6 + 6$$

$$\therefore 2p_R = 28$$

Rpta.: B

Resolución 49:



Piden : $2p = L_{\widehat{BT}} + L_{\widehat{TQ}} + BQ$

Dato :

$$AB = AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow BQ = 2\sqrt{2}$$

Ahora, se trazan $\overline{BT}$ y $\overline{AT}$:

$\Rightarrow$ El ΔABT es equilátero.

$$\Rightarrow L_{\widehat{BT}} = \left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi$$

Por otro lado: $m\angle TAC = m\widehat{TC} = 30$

Por ángulo inscrito: $m\angle CBT = 15$

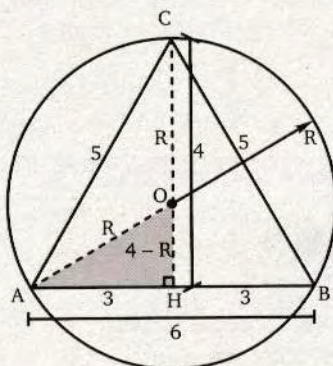
$$\Rightarrow L_{\widehat{TQ}} = \left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi$$

Finalmente: $2p = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi + \frac{\sqrt{2}}{6} \pi + 2\sqrt{2}$

$$\therefore 2p = \frac{\sqrt{2}}{6} (5\pi + 12)$$

Rpta.: E

Resolución 50:



Sea R el radio de la circunferencia

Piden: $L_{\odot} = 2\pi R$

Datos: $AB = 6 \wedge AC = BC = 5$

Ahora, se trazan $\overline{AO}$ y la altura $\overline{CH}$

$\Rightarrow AH = HB = 3,$

$CH = 4 \wedge AO = OC = R$

En consecuencia: $OH = 4 - R$

En el $\triangle AHO$: $R^2 = (4 - R)^2 + 3^2$

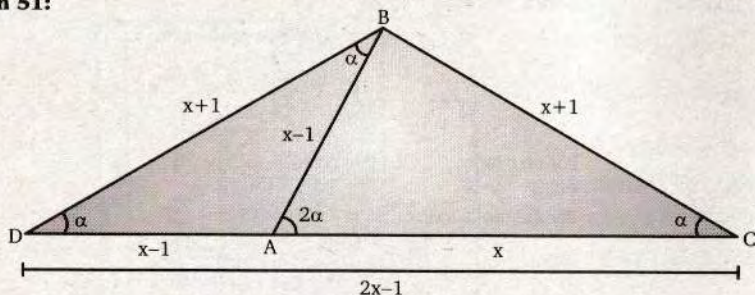
$$\Rightarrow R = \frac{25}{8}$$

Finalmente: $L_{\odot} = 2\pi \left(\frac{25}{8}\right)$

$$\therefore L_{\odot} = \frac{25\pi}{4}$$

Rpta.: C

Resolución 51:



$$\text{Piden: } 2p_{ABC} = x + (x+1) + (x-1) = 3x$$

Por dato: $m\angle A = 2m\angle C$, pues $BC > AB$.

Ahora, se prolonga $\overline{CA}$ y se construye el $\triangle DAB$ isósceles.

$$\Rightarrow AD = AB = x-1 \quad \wedge \quad DB = BC = x+1$$

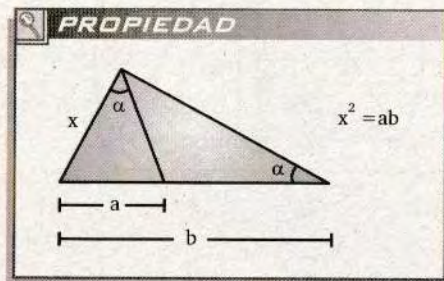
Luego, por propiedad de semejanza:

$$(x+1)^2 = (x-1)(2x-1)$$

$$\Rightarrow x = 5$$

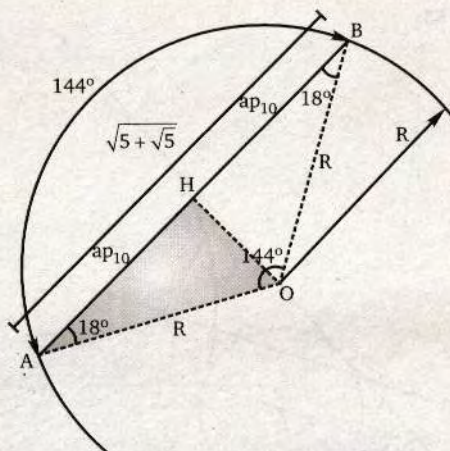
Finalmente:

$$2p_{ABC} = 3(5) = 15$$



Rpta.: C

Resolución 52:



Sea R el radio de la circunferencia

$$\Rightarrow \text{Piden: } L_O = 2\pi R \quad \dots \text{I}$$

$$\text{Datos: } m\widehat{AB} = 144^\circ \wedge AB = \sqrt{5 + \sqrt{5}} \quad \dots \text{II}$$

$\Rightarrow$ En forma análoga al problema 9:

$$AB = 2a_{P_{10}} = 2 \left[\frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right] \quad \dots \text{III}$$

Reemplazando II en III:

$$\sqrt{5 + \sqrt{5}} = 2 \left[\frac{R}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right] \Rightarrow R = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}$$

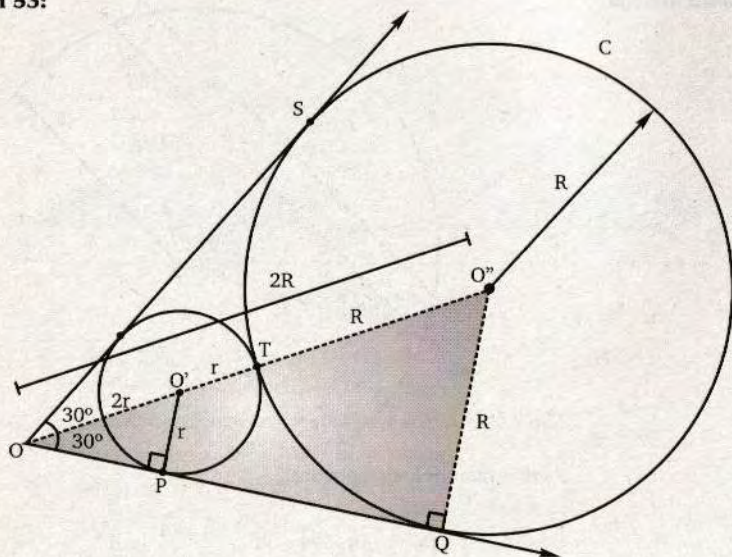
$$\text{Finalmente, en I: } L_O = 2\pi(\sqrt{2})$$

$$\therefore L_O = 2\sqrt{2}\pi$$

Rpta.: A

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 53:



Piden: $L_C = 2\pi R$

Datos: $m\angle SOQ = 60^\circ \wedge r = 1$

Se trazan $\overline{OO''}$, $\overline{O'P}$ y $\overline{O''Q}$

$\Rightarrow$ En el $\triangle OPO'$: $O'P = r \wedge OO' = 2r$

En el $\triangle OQO''$: $O''Q = R \wedge OO'' = 2R$

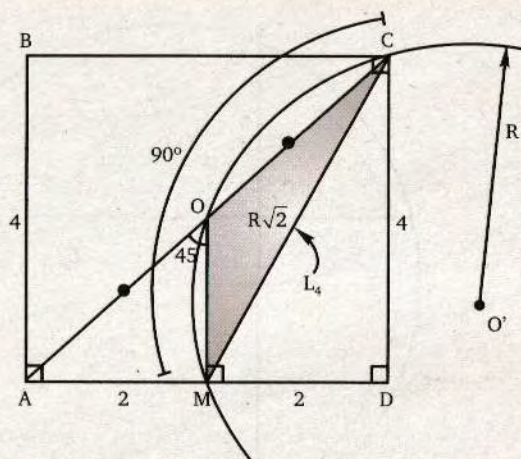
En consecuencia: $R = 3r$ (Teorema)

Del dato, $r = 1 \Rightarrow R = 3(1) = 3$

$$\therefore L_C = 2\pi(3) = 6\pi$$

Rpta.: B

Resolución 54:



Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle MOC$.

$$\Rightarrow \text{Piden: } L_{\odot} = 2\pi R$$

Por dato: $AB = 4$ y O es centro del cuadrado.

$$\Rightarrow m\angle AOM = 45$$

$$\Rightarrow \text{Por } \angle \text{exinscrito: } m\widehat{MOC} = 90, \text{ pues } m\angle AOM = \frac{m\widehat{MOC}}{2}$$

$$\Rightarrow MC = L_4 = R\sqrt{2}$$

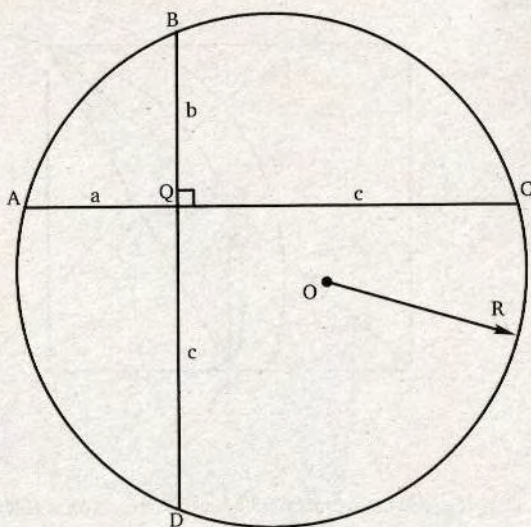
Ahora, en el $\triangle MDC$:

$$(R\sqrt{2})^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow R = \sqrt{10}$$

$$\therefore L_{\odot} = 2\pi\sqrt{10}$$

Rpta.: B

Resolución 55:



$$\text{Piden: } L_{\odot} = 2\pi R \quad \dots\text{I}$$

$$\text{Por dato: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 100 \quad \dots\text{II}$$

Ahora, por el teorema de Faure:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2 \quad \dots\text{III}$$

Reemplazando II en III:

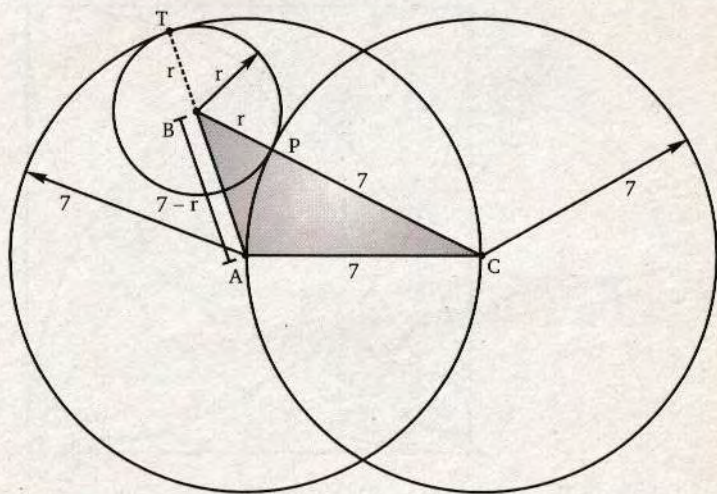
$$100 = 4R^2 \Rightarrow R = 5$$

Finalmente, en I:

$$L_{\odot} = 2\pi(5) = 10\pi$$

Rpta.: D

Resolución 56:



Piden: $2p_{ABC} = AB + BC + AC$

Dato: $AC = 7$

Sea r el radio de la circunferencia de centro B .

$\Rightarrow AB = 7 - r$, pues A, B y T son colineales.

También, B, P y C son colineales.

$\Rightarrow BC = 7 + r$

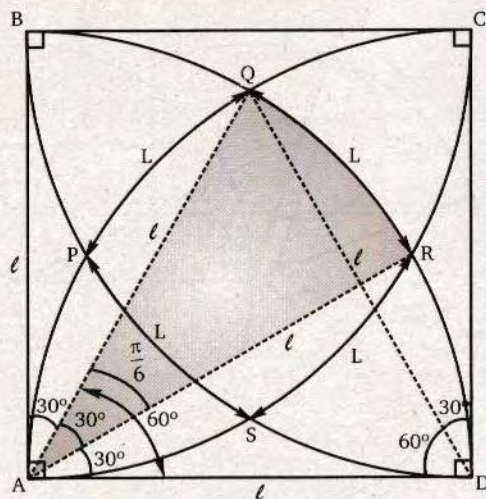
Luego: $2p_{ABC} = (7 - r) + (7 + r) + 7$

$$\therefore 2p_{ABC} = 21$$

Rpta.: B

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 57:



Piden: $2p_{PQRS} = 4L$

Curvilíneo

Dato: $AB = \ell$

Se trazan $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$ y $\overline{QD}$

$\Rightarrow$ El $\triangle AQD$ es equilátero

$\Rightarrow m\angle BAQ = 30^\circ$, pues $m\angle QAD = 60^\circ$

Análogamente, $m\angle QAR = 30^\circ$

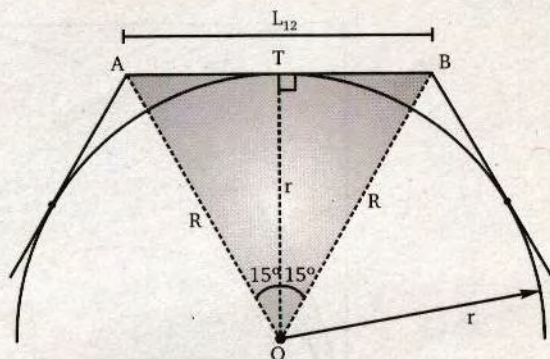
Finalmente, en el sector circular QAR :

$$L = \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \ell$$

$$\therefore 4L = \frac{2\pi}{3} \ell$$

Rpta.: E

Resolución 58:



$$\text{Piden: } 2P_{\text{DODECÁGONO REGULAR}} = 12L_{12}$$

$$\text{Dato: } r = 2 + \sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ AOB es el triángulo elemental del dodecágono regular con circunradio R

$$\Rightarrow OT = ap_{12} = r$$

$$\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$R = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \quad \dots I$$

$$\text{Luego: } AB = L_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \dots II$$

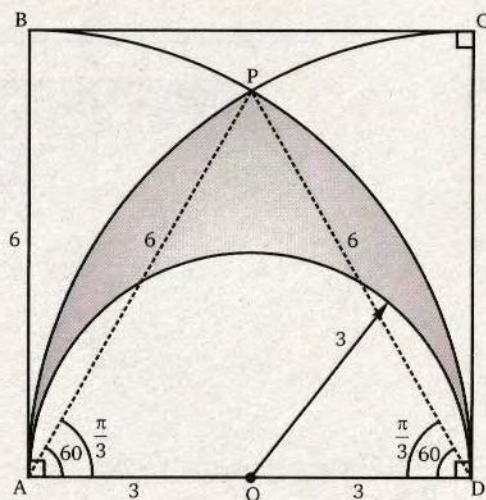
$$L_{12} = (2\sqrt{2 + \sqrt{3}})\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow L_{12} = 2$$

$$\therefore 12L_{12} = 24$$

Rpta.: D

Resolución 59:



Piden: $L_{\widehat{AP}} + L_{\widehat{PD}} + L_{\widehat{AD}}$

Dato: $AB = 6$

Se trazan $\overline{AP}$ y $\overline{PD}$

$\Rightarrow$ El $\triangle APD$ es equilátero

$$\Rightarrow L_{\widehat{AP}} = L_{\widehat{PD}} = \left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot 6 = 2\pi$$

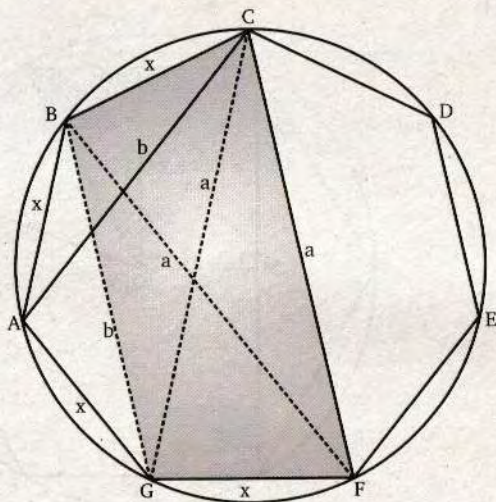
También:

$$L_{\widehat{AD}} = \pi(3) = 3\pi$$

$$\therefore L_{\widehat{AP}} + L_{\widehat{PD}} + L_{\widehat{AD}} = 7\pi$$

Rpta.: C

Resolución 60:



Sea $AB = x$, $FC = a$ y $AC = b$

$\Rightarrow$ Piden: Perímetro heptágono $= 7x$

Por dato: $a^2 - ab = 16$...I

Ahora, se trazan $\overline{BG}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CG}$

$\Rightarrow CF = CG = BF = a$ y $AC = BG = b$, pues BCFG y ABCG son trapecios isósceles.

Luego por el teorema de Ptolomeo en BCFG:

$$\Rightarrow a \cdot a = a \cdot b + x \cdot x$$

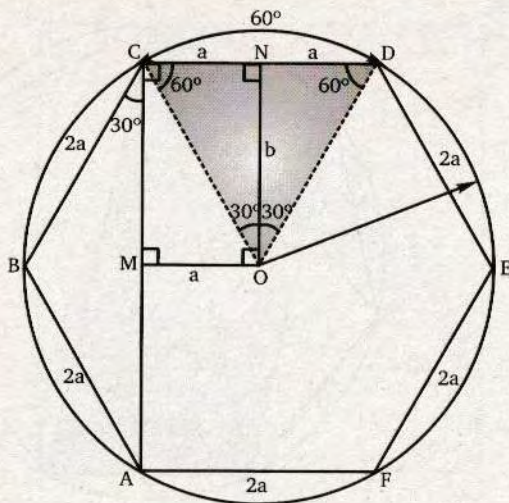
$$\Rightarrow a^2 - ab = x^2$$
 ...II

Reemplazando II en I: $x^2 = 16$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$\therefore 7x = 7(4) = 28$$

Rpta.: D


$$\Rightarrow \text{Por dato: } a + b = 4(\sqrt{3} + 1) \quad \dots I$$

$\Rightarrow$ Piden: Perímetro hexágono $= 6(2a) = 12a$

$$b = a\sqrt{3} \quad \dots II$$
$$a + a\sqrt{3} = 4(\sqrt{3} + 1) \Rightarrow a = 4$$

$$a(1 + \sqrt{3})$$

$$\therefore 12a = 12(4) = 48$$

Rpta.: C

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

En consecuencia:

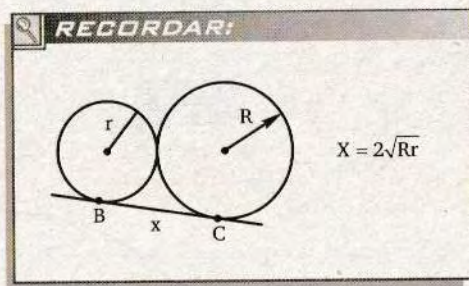
$$m\angle DO'A = m\angle FO'C = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow L_{\widehat{AD}} = \left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{14\pi}{9} \wedge L_{\widehat{FGC}} = (21)\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 28\pi$$

Luego, por propiedad:

$$AB = DE = 2\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)(7)} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$BC = EF = 2\sqrt{(7)(21)} = 14\sqrt{3}$$



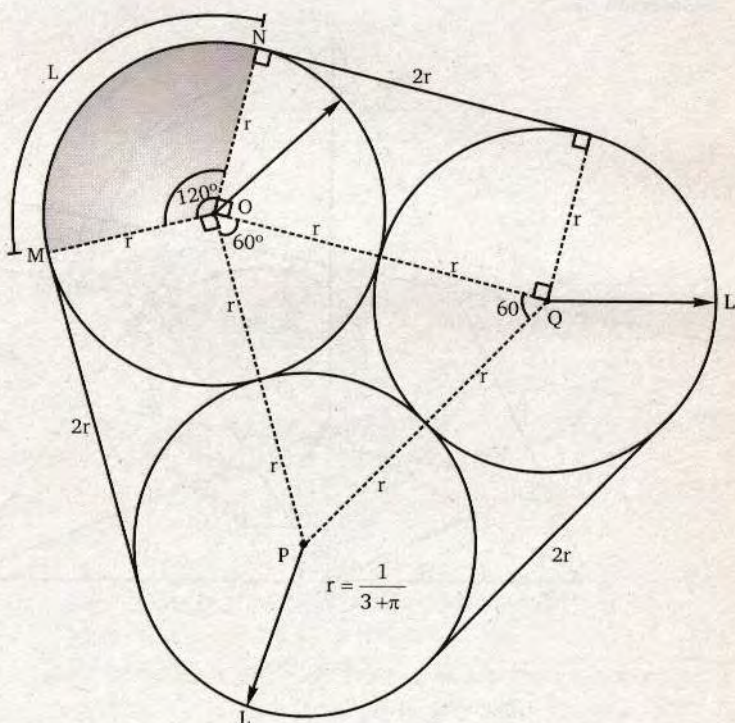
Finalmente:

$$L_{\text{CORREA}} = \frac{14\pi}{9} + 28\pi + \frac{14\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3} + 14\sqrt{3} + 14\sqrt{3}$$

$$\therefore L_{\text{CORREA}} = \frac{266\pi}{9} + \frac{112}{3}\sqrt{3}$$

Rpta.: A

Resolución 64:



Del gráfico, piden $F = 3L + 3(2r)$...I

$$\text{Dato: } r = \frac{1}{3 + \pi}$$

Se prueba fácilmente, que el ΔPOQ es equilátero.

En consecuencia: $m\angle MON = 120$

$$\Rightarrow L = \left(\frac{2\pi}{3}\right)r \quad \dots II$$

Reemplazando II en I:

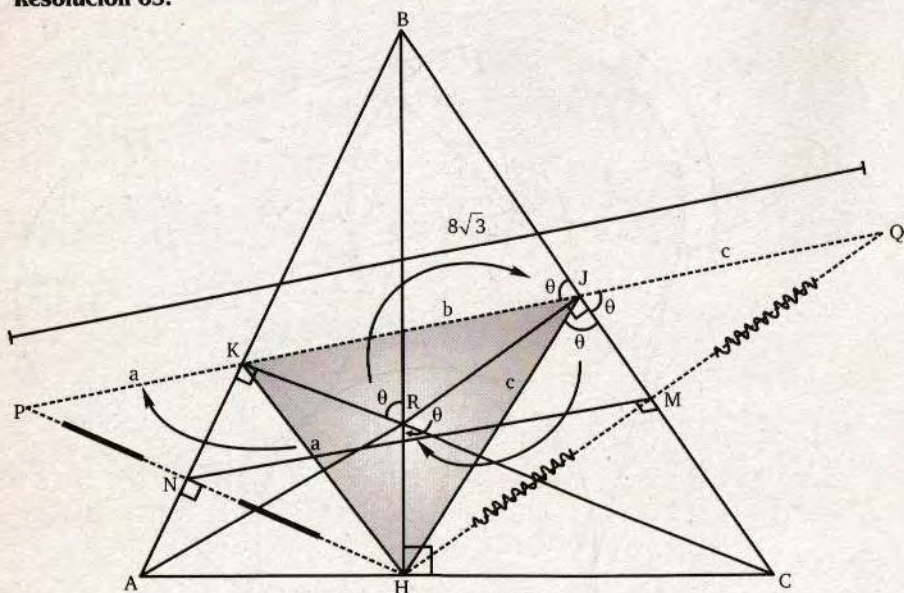
$$F = 3 \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)r + 3(2r) = 2r(\pi + 3)$$

$$\Rightarrow F = 2 \left(\frac{1}{3 + \pi}\right)(\pi + 3)$$

$$F = 2$$

Rpta.: C

Resolución 65:



Piden: $2p_{H,K} = a + b + c$

Dato: $MN = 4\sqrt{3}$

Ahora, sea $m \angle \text{HTM} = \theta$

$$\Rightarrow m \angle HRC = \theta, \text{ pues } HRJC \text{ es inscriptible.}$$

En consecuencia: $m\angle KRB = m\angle KJN = \theta$, ya que KBJR es inscriptible.

$$\Rightarrow m \angle QJM = \theta$$

$\Rightarrow$ En el $\triangle HJQ$ isósceles:

$$HJ = JQ = C \wedge HM = MQ$$

En forma análoga, en el ΔPKH :

$$\Rightarrow PK = HK = a \wedge NP = NH$$

Finalmente, $\overline{NM}$ es base media de $\overline{PQ}$

$$\Rightarrow NM = \frac{PQ}{2}$$
$$\Rightarrow PQ = 8\sqrt{3}$$
$$\therefore a + b + c = 8\sqrt{3}$$

Rpta.: E

$\Rightarrow$ Por propiedad:

$$\ell_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}}$$

$$\Rightarrow \ell_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2} \quad \dots \text{II}$$

$$\text{Además: } \ell_4 = R\sqrt{2} \quad \wedge \quad \ell_3 = R\sqrt{3} \quad \dots \text{III}$$

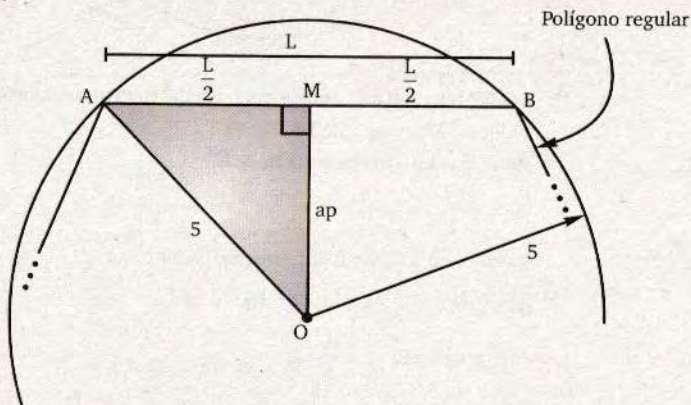
Reemplazando II y III en I:

$$\Rightarrow (R\sqrt{2})^2 - (2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \ell_n^2}) = \ell_n \cdot R\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4R^2 - \ell_n^2} = \sqrt{3}\ell_n$$

$$\Rightarrow \ell_n = R$$

$$\therefore n = 6$$

Rpta.: C**Resolución 68:**

Sea $\overline{AB}$ un lado del polígono regular, donde L y ap son las longitudes del lado y el apotema, respectivamente.

$$\Rightarrow \text{Por dato: } ap = L - 5 \quad \dots \text{I}$$

Piden: L

$$\text{Ahora, del } \triangle OMA: \left(\frac{L}{2}\right)^2 + ap^2 = 5^2 \quad \dots \text{II}$$

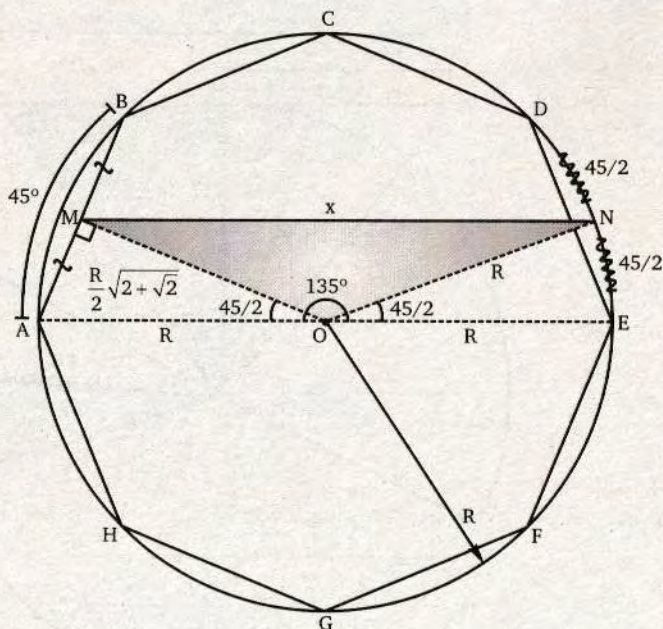
Reemplazando I en II:

$$\frac{L^2}{4} + (L - 5)^2 = 5^2$$

$$\therefore L = 8$$

Rpta.: B

Resolución 70:



Piden: $MN = x$

Dato: $AE = 2R$

$\Rightarrow$ Del gráfico.

$$ON = R \wedge OM = ap_8 = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

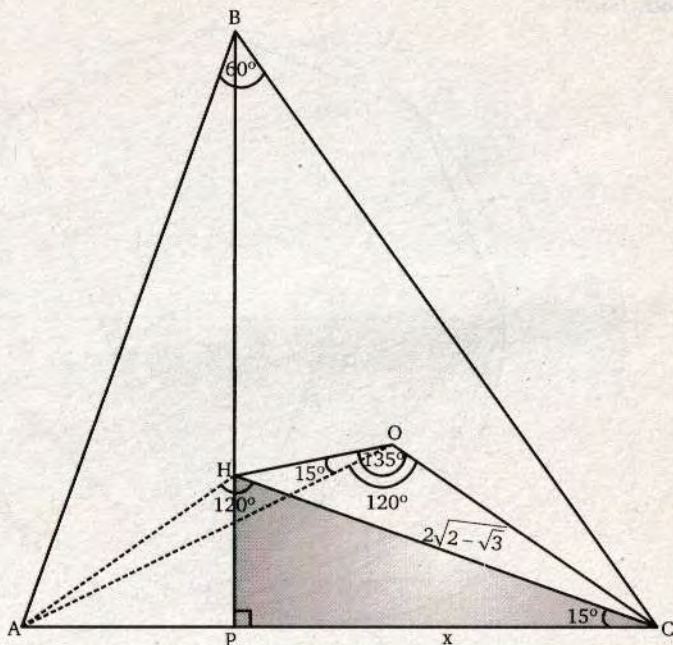
Ahora, por el Teorema del coseno en el $\triangle MON$:

$$x^2 = \left(\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right)^2 + R^2 - 2 \left(\frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}} \right) \cdot R \cdot \cos 135^\circ$$

$$\therefore x = \frac{R}{2} \sqrt{6 + \sqrt{2} + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

Rpta.: E

Resolución 71:



Piden: $PC = x$ (Longitud de la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$)

Por dato, H es ortocentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ Por propiedad: $m\angle AHC + m\angle ABC = 180$

$\Rightarrow m\angle AHC = 120$

También, O es circuncentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ Por propiedad: $m\angle AOC = 2m\angle ABC$

$\Rightarrow m\angle AOC = 120$

En consecuencia, AHOC es un cuadrilátero inscribible.

$\Rightarrow m\angle HOA = m\angle HCA = 15$, pues del otro dato, $m\angle HOC = 135$

Finalmente: $PC = X = ap_{12}$ con circunradio $R = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

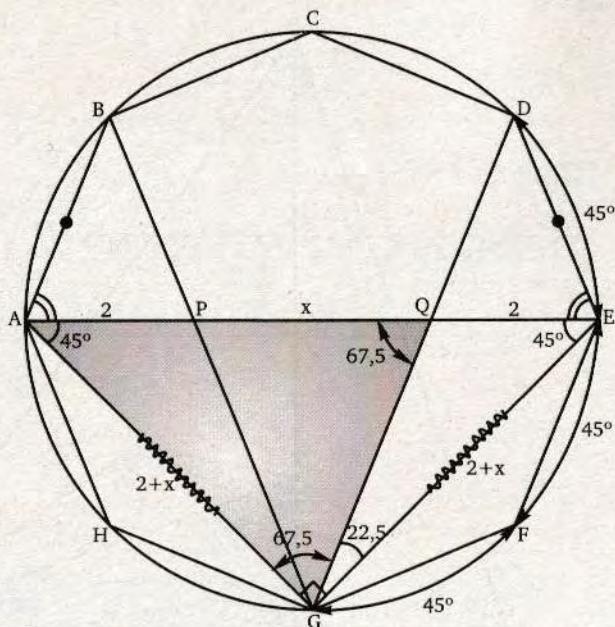
$$\Rightarrow x = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\therefore x = 1$$

Rpta.: A

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 72:



Piden: $PQ = X$

Por dato: $AP = 2$

$\Rightarrow$ Por efectos de simetría, $QE = 2$

Ahora, por $\angle$ inscrito: $m\angle EAG = \frac{m\widehat{EG}}{2} \Rightarrow m\angle EAG = 45$

$$m\angle DGE = \frac{m\widehat{DE}}{2} \Rightarrow m\angle DGE = 22,5$$

En consecuencia, el $\triangle GAQ$ es isósceles.

$$\Rightarrow AQ = AG = GE = 2 + x$$

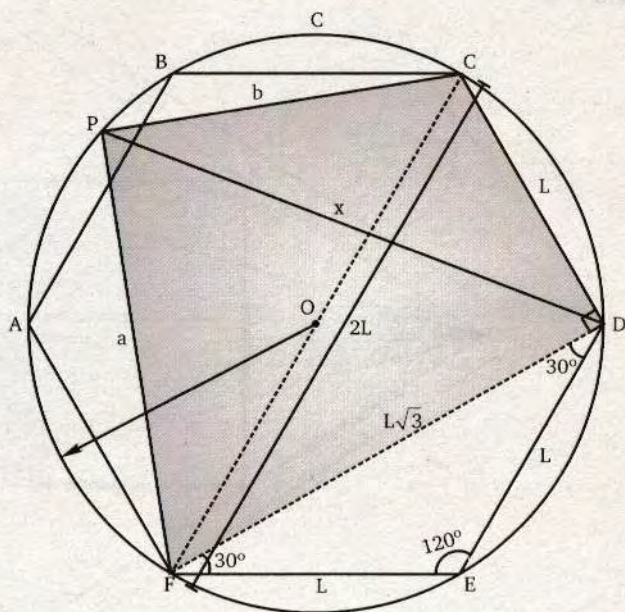
$$\Rightarrow \text{En el } \triangle AGE: AE = AG\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2 + x + 2 = (2 + x)\sqrt{2}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: C

Resolución 73:



Piden: $PD = X$

Sea $CD = L$ y se trazan $\overline{FD}$ y FC

$$\Rightarrow FD = L\sqrt{3} \wedge FC = 2L$$

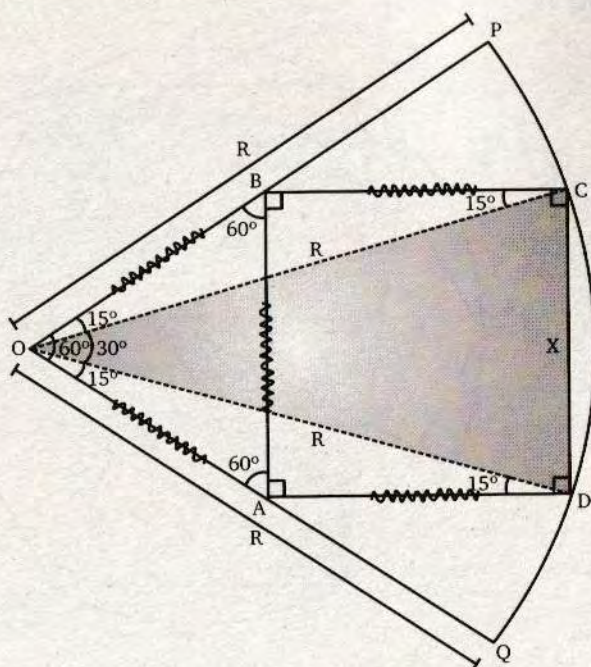
Ahora, por el teorema de Ptolomeo en el $\square FPCD$:

$$X \cdot 2L = a \cdot L + b \cdot L\sqrt{3}$$

$$\therefore X = \frac{a + b\sqrt{3}}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 74:



Piden: X (Longitud del lado del cuadrado)

Por la simetría de la figura: $OB = OA$

$\Rightarrow$ El $\triangle BOA$ es equilátero

$\Rightarrow BO = BA = BC$

$\Rightarrow m\angle BOC = m\angle BCO = 31,5^\circ$ pues $m\angle OBC = 150^\circ$

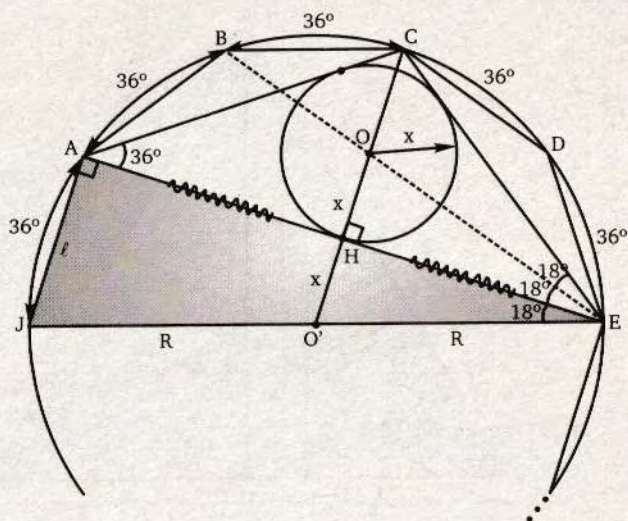
En forma análoga, $m\angle AOD = 15^\circ$

Finalmente, COD es el triángulo elemental del dodecágono regular, pues $m\angle COD = 30^\circ$

$$\Rightarrow x = L_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Rpta.: B

Resolución 75:



Piden: X

Dato: $AJ = \ell$

Por $\propto$ inscrito: $m\angle AEB = m\angle AEJ = 18$

$\Rightarrow$ En el $\triangle OEO'$: $OH = HO' = X$

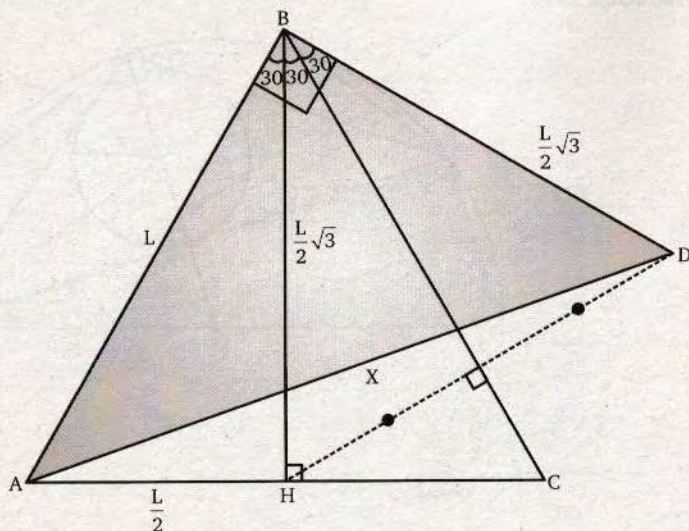
También, en el $\triangle ACE$ isósceles: $AH = HE$

$\Rightarrow \overline{OH}$ es base media de $\overline{JA}$ en el $\triangle JAE$.

$$\therefore X = \frac{\ell}{2}$$

Rpta.: A

Resolución 76:



Piden: $AD = X$

Dato: $AB = L \wedge \overline{BD}$ es el simétrico de $\overline{BH}$ respecto de $\overline{BC}$.

$$\Rightarrow BD = \frac{L}{2}\sqrt{3} \wedge m\angle HBC = m\angle DBC = 30$$

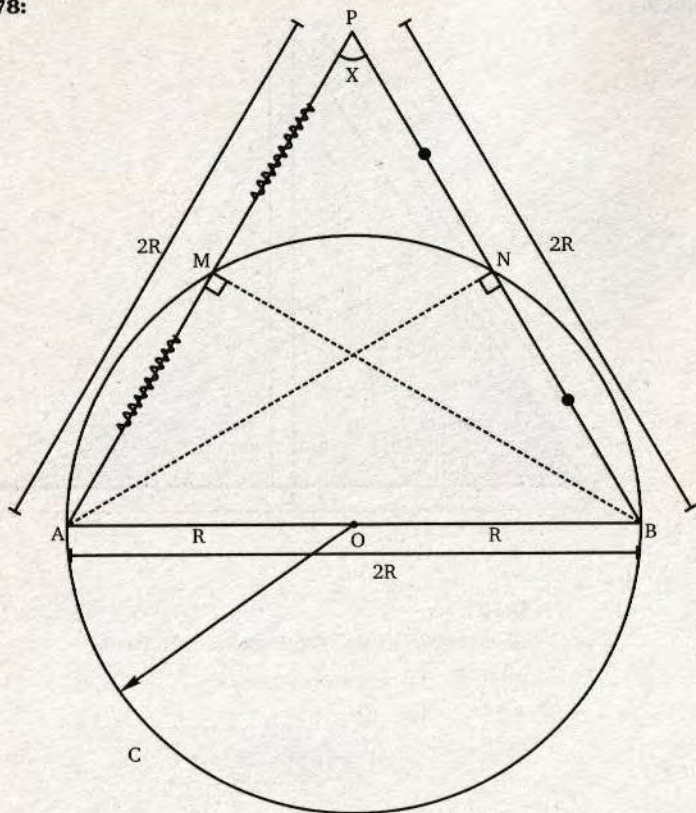
En consecuencia: $m\angle ABC = 90$

$$\Rightarrow \text{En el } \triangle ABD: x^2 = L^2 + \left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right)^2$$

$$\therefore X = \frac{\sqrt{7}}{2}L$$

Rpta.: C

Resolución 78:



Por dato: P es el simétrico de A respecto de M

$$\Rightarrow AM = MP$$

P es el simétrico de B respecto de N

$$\Rightarrow BN = NP$$

$$\Rightarrow \text{Piden: } m\angle APB = x$$

Sean O el centro y $AB = 2R$

Luego, se trazan $\overline{BM}$ y $\overline{AN}$

En consecuencia: $AB = BP = 2R$, pues $\overline{BM}$ es mediatriz de $\overline{AP}$

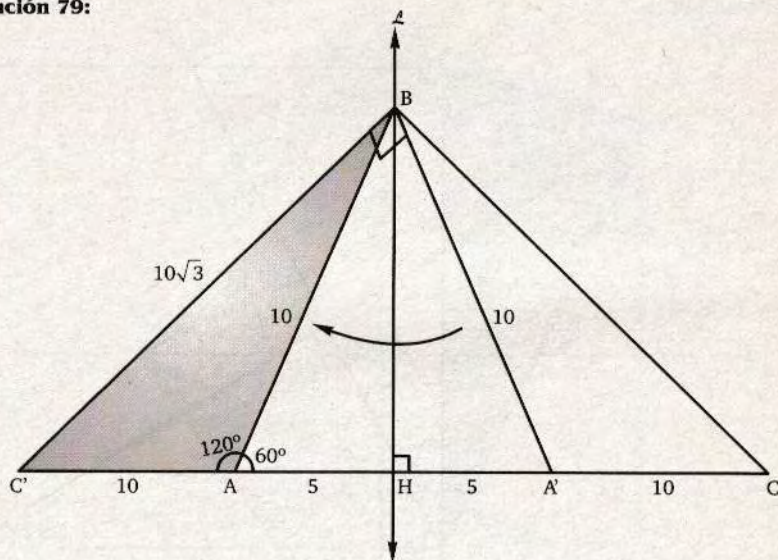
Análogamente: $AB = AP = 2R$

$\Rightarrow APB$ es un triángulo equilátero

$$\therefore x = 60$$

Rpta.: C

Resolución 79:



$$\text{Piden: } 2P_{ABC} = C'B + BA + AC'$$

Dato: $AC = 20 \wedge \overline{BA'}$ es la mediana del $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AA' = A'B = A'C = AB = 10$$

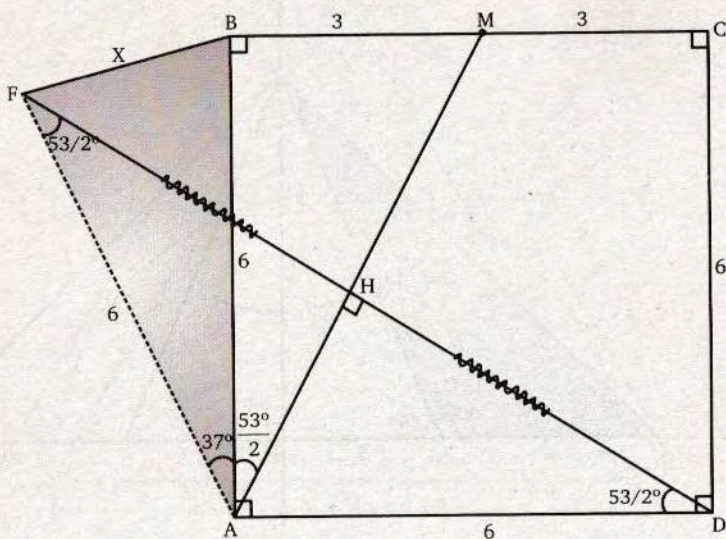
$$\text{Tambi3n: } AH = HA' = 5 \wedge C'A = A'C = 10$$

Por propiedad, en el $\triangle C'AB$: $C'B = 10\sqrt{3}$

$$\text{Finalmente: } 2P_{ABC} = 10\sqrt{3} + 10 + 10$$

$$\therefore 2P_{ABC} = 10(\sqrt{3} + 2)$$

Rpta.: B

Resolución 80:

Piden: $BF = x$

Por dato: $CD = 6$ y M es punto medio de $\overline{BC}$.

$$\Rightarrow \text{En } \triangle ABM: m\angle BAM = \frac{53^\circ}{2}$$

En consecuencia: $m\angle ADH = m\angle AFH = \frac{53^\circ}{2} \wedge AF = AD = 6$

$$\Rightarrow \text{En } \triangle \text{FHA: } m \angle \text{FAB} = 37$$

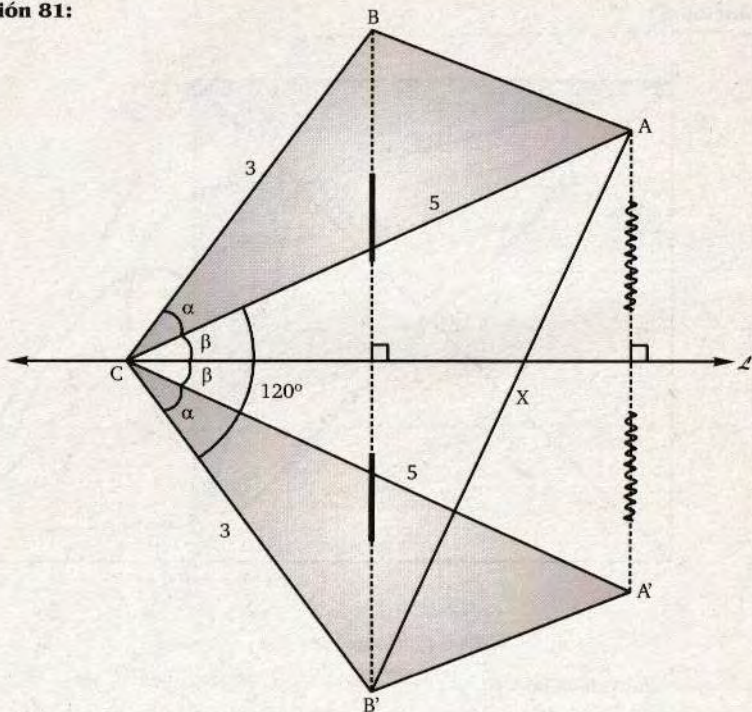
Finalmente, por el teorema del coseno en el ΔFAB :

$$x^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 37^\circ$$

$$x = \sqrt{\frac{72}{5}}$$

Rpta.: A

Resolución 81:



Piden: $AB' = x$

Dato: $\alpha + 2\beta = 120$, $AC = 5$ y $BC = 3$

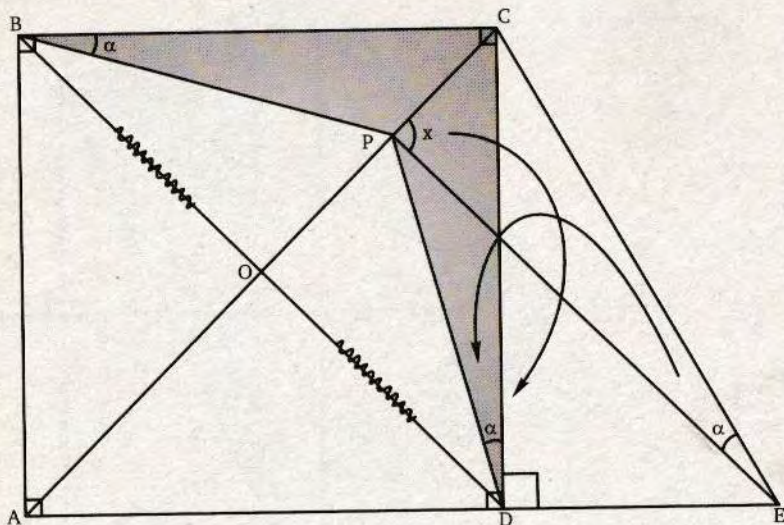
$\Rightarrow m\angle ACB' = 120^\circ$ $B'C = 3$, pues $AB'C$ es el simétrico de ABC respecto de l .

Luego, en el $\triangle ACB'$ por el teorema del coseno: $x^2 = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 120$

$$\therefore x = 7$$

Rpta.: D

Resolución 82:



Piden: $m\angle CPE = x$

Dato: $m\angle CBP = m\angle CEP = x$

Ahora, se traza $\overline{PD}$.

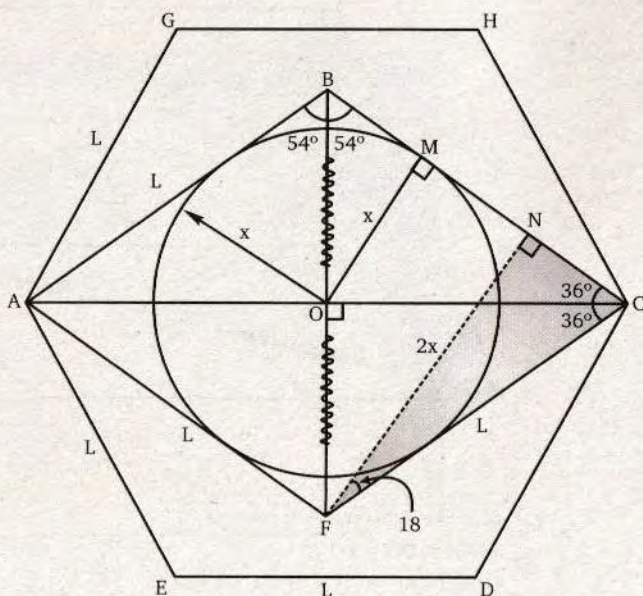
$\Rightarrow m\angle CBP = m\angle CDP = \alpha$, pues CDP es el simétrico de CBP respecto de la recta que contiene a $\overline{AC}$.

En consecuencia, $PCED$ es un cuadrilátero inscriptible, ya que $m\angle PDC = m\angle PEC = \alpha$

$$\therefore x = 90$$

Rpta.: E

Resolución 84:



Sean x el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero ABCE.

Por dato, AGHCF es el simétrico del pentágono regular ABCDE cuyo lado mide L.

$$\Rightarrow AB = AF = FC = L \quad \wedge \quad m\angle BCA = m\angle FCA = 36$$

Ahora, se trazan $\overline{OM}$ y $\overline{FN} \parallel \overline{OM}$

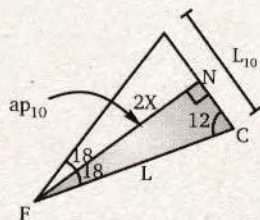
$$\Rightarrow \overline{OM} \text{ es base media de } \overline{FN}$$

$$FN = 2X, \text{ pues } OM = \frac{FN}{2}$$

Finalmente, en el $\triangle$ FNC:

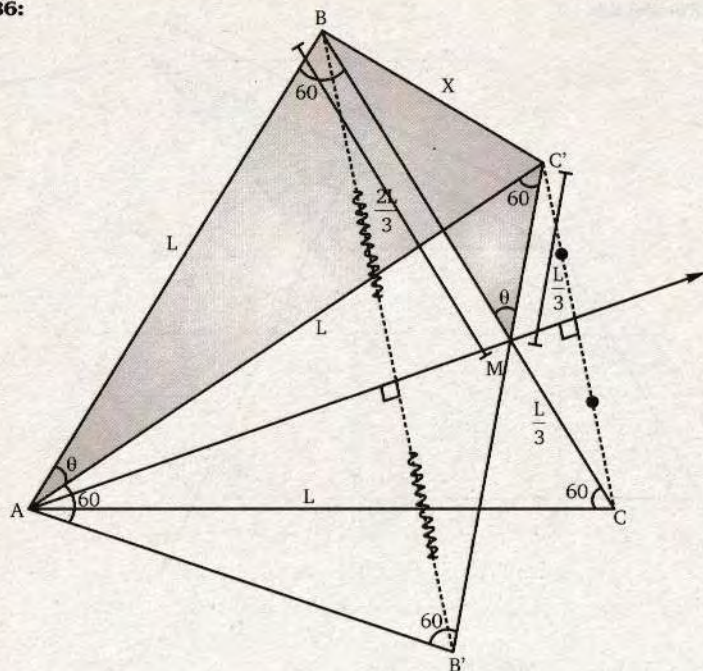
$$2x = ap_{10} = \frac{L}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$\therefore x = \frac{L}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$



Rpta.: E

Resolución 86:



Piden: $BC' = x$

Dato: $BC = L \wedge BM = 2MC$

Sea $m\angle BAC' = \theta \Rightarrow m\angle BMC' = \theta$, pues $ABC'M$ es inscriptible

Ahora, por el teorema del coseno en el $\triangle BAC'$: $x^2 = L^2 + L^2 - 2L \cdot L \cdot \cos\theta$

$$\Rightarrow x^2 = 2L^2 - 2L^2 \cos\theta \quad \dots I$$

$$\text{En el } \triangle BMC': x^2 = \left(\frac{2L}{3}\right)^2 + \left(\frac{L}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2L}{3}\right)\left(\frac{L}{3}\right)\cos\theta$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{5}{4}L^2 - \frac{4L^2}{9}\cos\theta \quad \dots II$$

$$\text{Igualando I y II: } \Rightarrow 2L^2 - 2L^2 \cos\theta = \frac{5L^2}{4} - \frac{4L^2}{9}\cos\theta$$

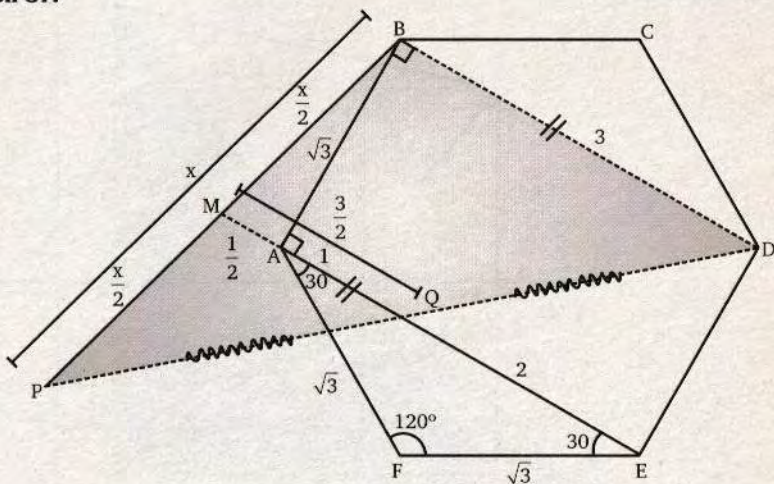
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{13}{14}$$

$$\text{Finalmente, se reemplaza en I: } x^2 = 2L^2 - 2L^2 \cdot \left(\frac{13}{14}\right)$$

$$\therefore x = \frac{L\sqrt{7}}{7}$$

Rpta.: A

Resolución 87:



Piden: $PB = X$

Dato: $AQ = 1$, $QE = 2$ y P es el simétrico de D respecto de Q .

$\Rightarrow BD = 3$

También, del $\triangle AFE$: $AF = FE = \sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = \sqrt{3}$

Luego, $\overline{MQ}$ es base media de $\overline{BD}$, pues $PQ = QD$ y $\overline{MQ} \parallel \overline{BD}$

$\Rightarrow MQ = \frac{BD}{2} = \frac{3}{2} \wedge PM = MB = \frac{X}{2}$

$\Rightarrow MA = \frac{1}{2}$

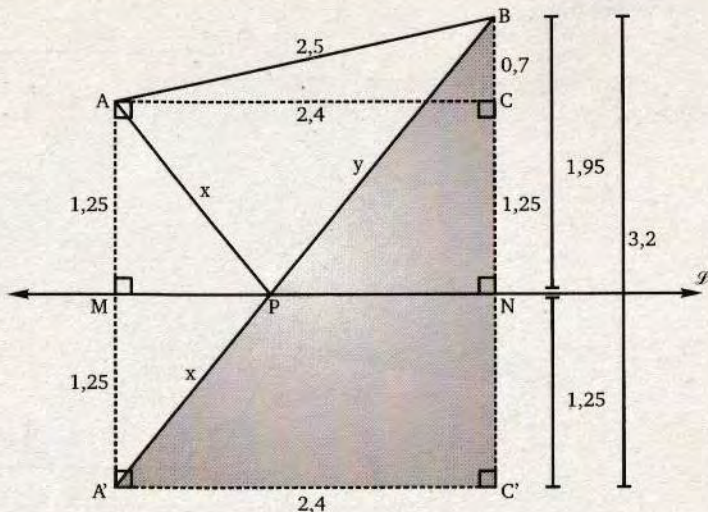
Finalmente, en el $\triangle MAB$:

$$\left(\frac{X}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$$

$$\therefore X = \sqrt{13}$$

Rpta.: B

Resolución 88:



Sea P un punto en la recta ℓ , tal que $AP + PB$ es el mínimo posible.

$\Rightarrow$ Para determinar el punto P , se traza el simétrico de A respecto de ℓ .

Luego: $\overline{AB} \cap \ell = \{P\}$

$\Rightarrow$ Piden: $AP + PB = x + y$

Ahora, se trazan los rectángulos $MACN$ y $MA'C'N$.

$\Rightarrow$ En el $\triangle ACB$: $AC^2 + (0,7)^2 = (2,5)^2$

$\Rightarrow AC = 2,4$

$\Rightarrow A'C' = 2,4$

Finalmente, en el $\triangle A'C'B$:

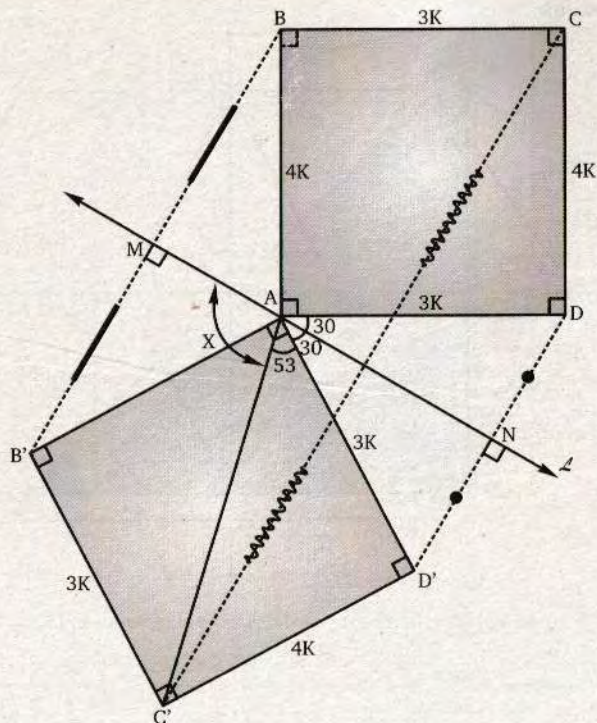
$$(x + y)^2 = (2,4)^2 + (3,2)^2$$

$$\therefore x + y = 4$$

Rpta.: D

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 90:



Piden: $m\angle MAC' = x$

Por dato: $3AB = 4BC \wedge m\angle DAN = 30$

$$\Rightarrow AB = 4K \wedge BC = 3K$$

$$\Rightarrow AD' = AD = 3K \wedge C'D' = CD = 4K$$

En consecuencia, en el $\triangle C'AD'$: $m\angle C'AD' = 53$

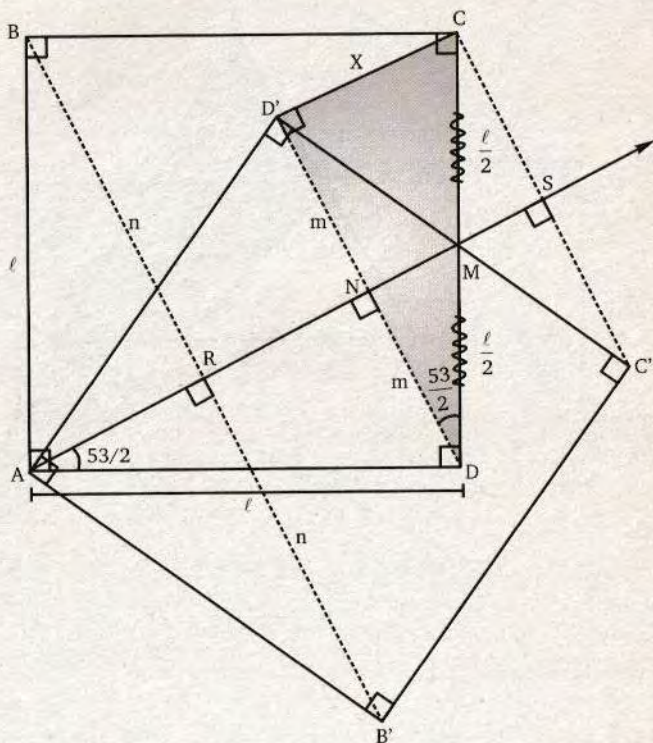
Finalmente, en el vértice A:

$$x + 53 + 30 = 180$$

$$\therefore x = 97$$

Rpta.: D

Resolución 91:



Piden: $CD' = x$

Por dato, $AB'C'D'$ es el simétrico del cuadrado $ABCD$ cuyo lado mide ℓ , respecto de $\overline{AM}$.

$\Rightarrow DN = D'N = m$

También, M es punto medio de $\overline{CD}$

$\Rightarrow \overline{NM}$ es base media de $\overline{D'C}$

$\Rightarrow \overline{D'C} \parallel \overline{NM}$.

En consecuencia: $m\angle CD'D = 90$

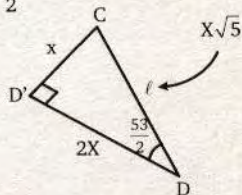
Por otro lado, en el $\triangle ADM$: $m\angle MAD = \frac{53}{2}$

$\Rightarrow m\angle D'DC = \frac{53}{2}$

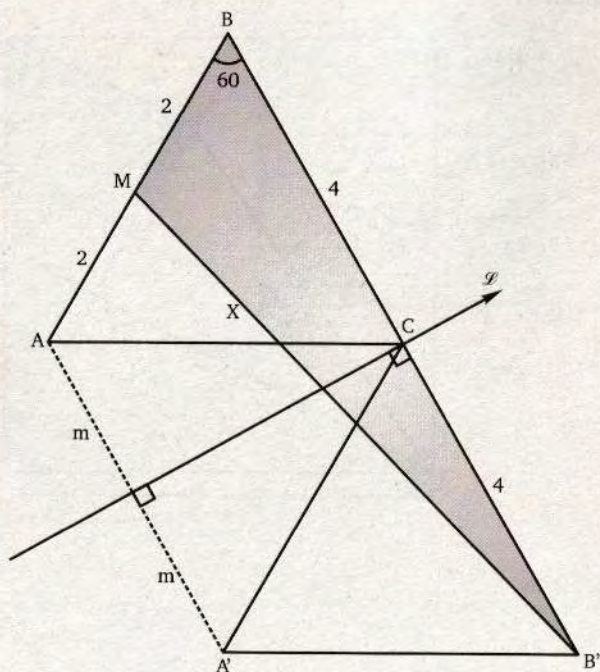
Luego, en el $\triangle CD'D$:

$\Rightarrow x\sqrt{5} = \ell$

$\therefore x = \frac{\ell\sqrt{5}}{5}$



Rpta.: B

Resolución 92:

Piden: $MB' = X$

Por dato, M es punto medio de $\overline{AB}$ y $CB'A'$ es el simétrico de CBA respecto de $\angle$ y $AB = 4$.

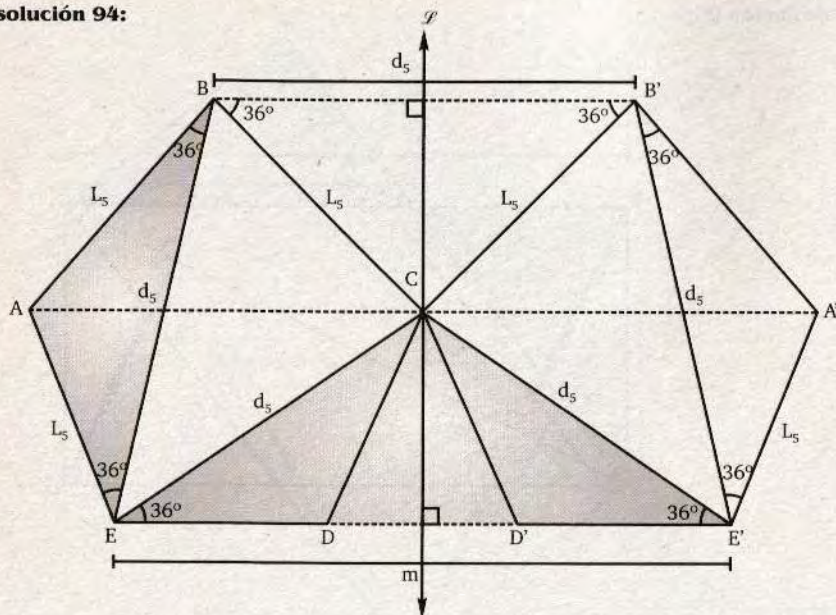
$$\Rightarrow AM = MB = 2 \wedge BC = CB' = 4$$

⇒ Por el Teorema del coseno en el $\triangle MBB'$: $x^2 = 8^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \cos 60$

$$\therefore X = 2\sqrt{13}$$

Rpta.: A

Resolución 94:



Piden: $A'E' = L_5$

Por dato: $2P_{EBB'E'} = 7 + \sqrt{5}$

Sean: d_5 la longitud de la diagonal del pentágono regular y $EE' = m$.

$$\Rightarrow \text{Del dato: } 3d_5 + m = 7 + \sqrt{5} \quad \dots I$$

Ahora, por propiedad en el $\triangle EAB$:

$$L_5 = \frac{d_5}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow d_5 = \frac{L_5}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad \dots II$$

Análogamente, en el $\triangle ECE'$:

$$m = \frac{d_5}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{L_5}{2}(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} + 1)$$

$$\Rightarrow m = \frac{L_5}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \dots III$$

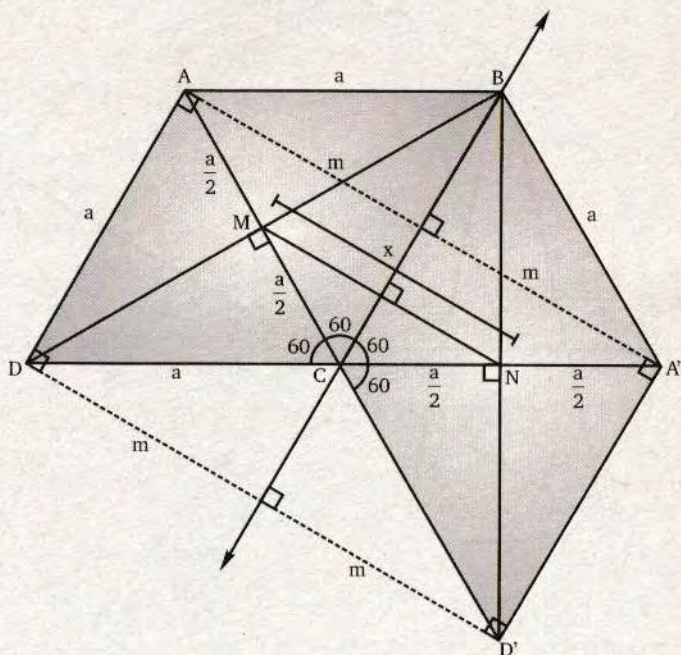
Reemplazando II y III en I:

$$3\left[\frac{L_5}{2}(\sqrt{5} + 1)\right] + \frac{L_5}{2}(3 + \sqrt{5}) = 7 + \sqrt{5}$$

$$\therefore L_5 = \sqrt{5} - 1$$

Rpta.: C

Resolución 95:



Piden: $MN = x$

Por dato: ABCD es un rombo cuyo lado mide a , tal que $AC = a$

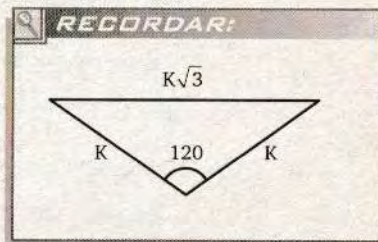
$\Rightarrow$ Se prueba, fácilmente, que los triángulos ABC y ADC son equiláteros.

Por otro lado, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{CA'}$, respectivamente.

También:

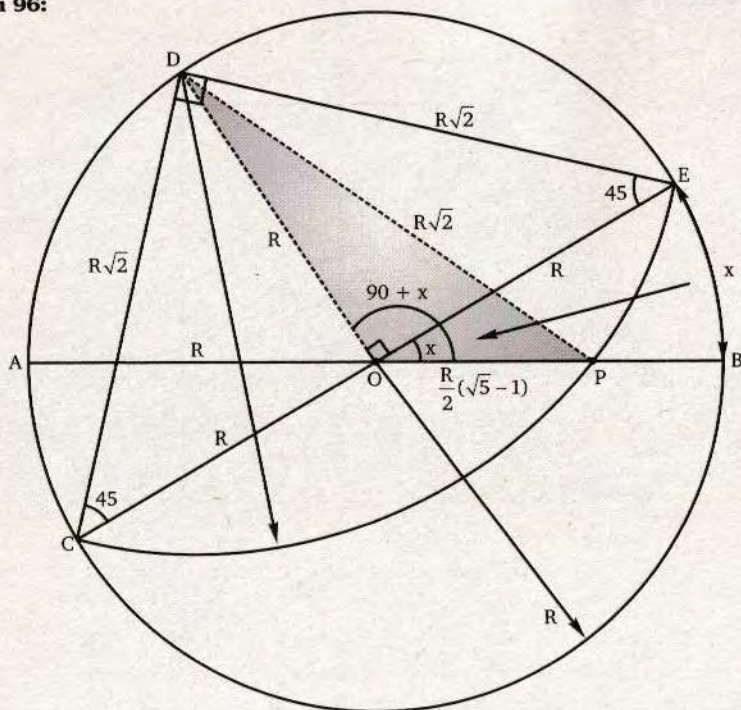
$\Rightarrow$ En $\triangle MCN$, por propiedad:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



Rpta.: B

Resolución 96:



Piden: $m\widehat{BE} = x$

Sea R el radio de la circunferencia

$\Rightarrow$ Del dato: $OP = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, pues $\overline{OP}$ es la sección áurea de $\overline{OA}$.

Por otro lado, en el $\triangle DOE$: $DO = R \wedge DE = DP = R\sqrt{2}$

Además, por $\angle$ central: $m\angle EOB = x$

Finalmente, por el teorema del coseno en el $\triangle DOP$:

$$(R\sqrt{2})^2 = R^2 + \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2 - 2R \cdot \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \cos(90 + x)$$

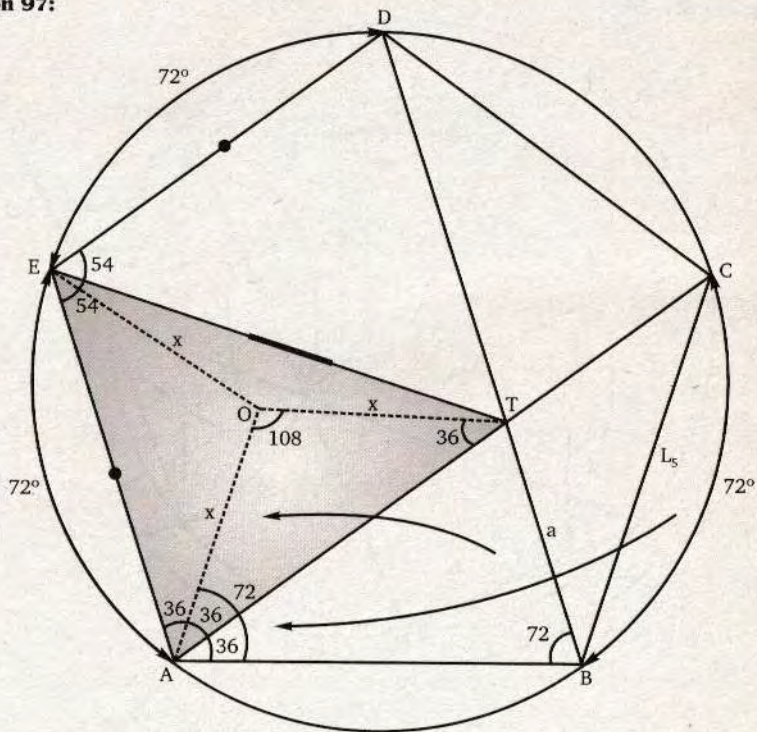
$$\Rightarrow \cos(90 + x) = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow 90 + x = 120$$

$$\therefore x = 30$$

Rpta.: A

Resolución 97:



Sea x el radio de la circunferencia circunscrita al $\triangle ATE$.

$$\Rightarrow \text{Piden: } L_{\odot} = 2\pi x \quad \dots \text{I}$$

Ahora, en el $\triangle ATE$ se ubica el circuncentro O .

$$\Rightarrow OA = OT = OE = x$$

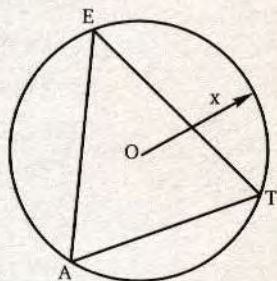
Por otro lado, es fácil probar que $AOTB$ es un trapecio isósceles.

$$\Rightarrow x = a \quad \dots \text{II}$$

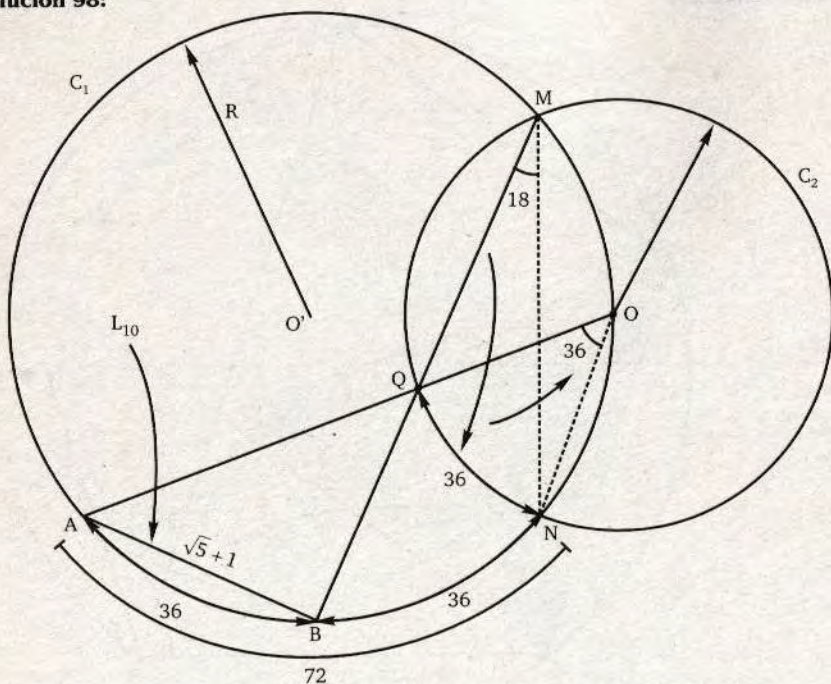
Reemplazando II en I:

$$\Rightarrow L_{\odot} = 2\pi a$$

Rpta.: B



BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución 98:

Piden: Radio R de C_1

Datos: $AB = \sqrt{5} + 1 \wedge m\widehat{NB} = 36$

Se trazan la cuerda común $\overline{MN}$ y $\overline{ON}$.

$\Rightarrow$ Por α inscrito en C_1 :

$$m\angle BMN = \frac{m\widehat{BN}}{2} \Rightarrow m\angle BMN = 18$$

Analogamente, en C_7 : $m\widehat{QN} = 36$

$$\Rightarrow \text{Por} \triangleleft \text{central} : m \triangleleft \text{QON} = 36$$

$$\Rightarrow \text{En } C_1 : m\widehat{AN} = 72, \text{ pues } m\angle AON = \frac{m\widehat{AN}}{2}$$

En consecuencia: $m\widehat{AB} = 36$

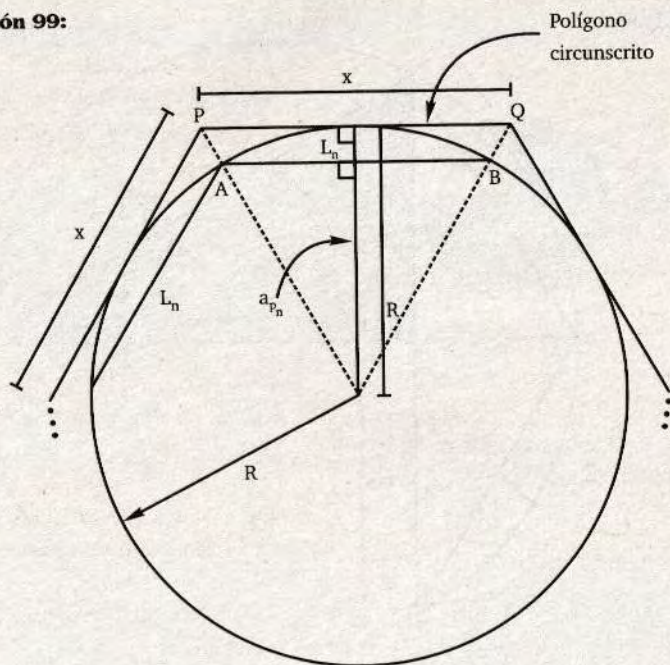
$$\Rightarrow AB = L_{10}, \text{concircunradio } R.$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} + 1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$\therefore R = 3 + \sqrt{5}$$

Rpta.: B

Resolución 99:



Piden: $PQ = x$

Del gráfico, se observa que:

$$\Rightarrow \frac{x}{L_n} = \frac{R}{a_{p_n}} \quad \dots I$$

Sin embargo, del problema 17:

$$a_{p_n} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L_n^2} \quad \dots II$$

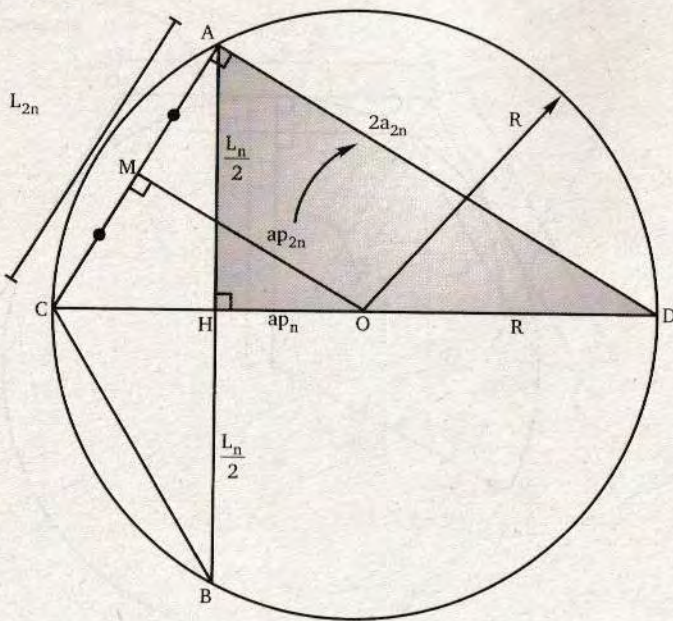
Reemplazando II en I:

$$\Rightarrow x = \frac{RL_n}{\frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

$$\therefore x = \frac{2RL_n}{\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$$

Rpta.: B

Resolución 100:



En forma análoga al problema 35 se construye L_{2n} , donde $AB = L_n$

$$\Rightarrow OH = a_n \wedge OM = a_{2n}$$

Luego: $AD = 2a_{2n}$, pues $\overline{OM}$ es base media de $\overline{AD}$.

$\Rightarrow$ En $\triangle$ AHD:

$$(2a_{2n})^2 = \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + (a_n + R)^2$$

$$\Rightarrow (2a_{2n})^2 = \frac{l_n}{4} + a_n^2 + R^2 + 2a_n R \quad \dots I$$

Pero, del problema 17:

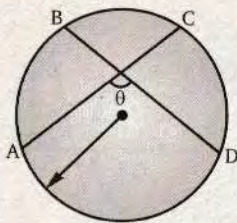
$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2} \Rightarrow \frac{l_n^2}{4} + a_n^2 = R^2 \quad \dots II$$

Reemplazando II en I:

$$\Rightarrow (2a_{2n})^2 = R^2 + R^2 + 2a_n R$$

$$\therefore a_{2n} = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 + 2a_n R}$$

Rpta.: B



- A) 75 B) 105 C) 120
D) 135 E) 126
8. En una circunferencia de diámetro $\overline{AD}$ se ubican los puntos B y C tal que $B \in \widehat{AC}$ y $C \in \widehat{BD}$. Si $m\widehat{AC} = 120$, $m\widehat{AB} = 90$ y el radio de la circunferencia mide R. Calcular BC.

- A) $\frac{R}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ B) $\frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
C) $\frac{R}{2}(\sqrt{3} + 1)$
D) $\frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$ E) $\frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{3})$
9. Desde un mismo punto P se trazan las secantes PBC y PDE, a una circunferencia de radio R. Calcular la medida del ángulo P si las cuerdas C E y BD miden, respectivamente $R\sqrt{3}$ y $R\sqrt{2}$
- A) 45
B) 30
C) 18
D) 15
E) 12

10. En una misma circunferencia, el cociente del perímetro del hexágono regular circunscrito entre el perímetro del hexágono regular inscrito es:

- A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

11. En un polígono regular ABCDEF..., las diagonales AC y BD forman un ángulo agudo cuya medida es 30. Calcular el número de lado.

- A) 6 B) 9 C) 12
D) 15 E) 24

12. En una circunferencia de longitud de radio R, se inscribe el triángulo equilátero ABC y el cuadrado BDEE, tal que EF interseca a AC en el punto P. Calcular BP.

- A) $\frac{R}{2}\sqrt{10}$ B) $\frac{R}{4}\sqrt{10}$
C) $\frac{R}{5}\sqrt{10}$
D) $\frac{R}{3}\sqrt{10}$ E) $\frac{3R}{5}\sqrt{10}$

13. Un hexágono regular ABCDEF está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide R. Calcule el perímetro del hexágono determinado por las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DF}$, $\overline{EA}$ y $\overline{FB}$.

- A) $R\sqrt{3}$ B) $2R\sqrt{3}$ C) $3R\sqrt{3}$
D) $4R\sqrt{3}$ E) $5R\sqrt{3}$

14. En un triángulo ABC, obtuso en el vértice B, se trazan las alturas $\overline{AF}$ y $\overline{CH}$. Si $AC = 12$, $m\angle BAC = 23^\circ$ y $m\angle ACB = 22^\circ$. Calcular la longitud de $\overline{HF}$.

A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

15. El triángulo ABC equilátero está inscrito en una circunferencia de radio R, siendo M y N puntos de $\overline{BC}$, tal que $BM = MN = NC$. Si $BM = MN = NC$ y $\overline{AM}$ intersecta a la circunferencia en P, calcular MP.

A) $\frac{2R\sqrt{21}}{21}$ B) $\frac{R\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{R\sqrt{21}}{7}$
D) $\frac{R\sqrt{7}}{21}$ E) $\frac{R\sqrt{21}}{21}$

16. Un heptágono regular ABCDEFG, $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{10}$. Calcular AB.

A) 5 B) 8 C) 10
D) 12 E) 15

17. En un nonágono o eneágono ABCDEFG.... regular $BG - BD = 11$. Calcular el perímetro del nonágono.

A) 88 B) 99 C) 110
D) 115 E) 121

18. En un triángulo ABC, el lado AB mide $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, los ángulos A y B miden 30° y 45° , respectivamente. Calcular la

longitud del segmento que une los pies de las alturas trazadas desde A y B.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

19. En un octágono regular ABCDEFGH, el radio de la circunferencia circunscrita mide $\sqrt{2} + 1$. Si $\overline{BE} \cap \overline{CF} = \{P\}$ y $\overline{BG} \cap \overline{AF} = \{Q\}$. Calcular PQ.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

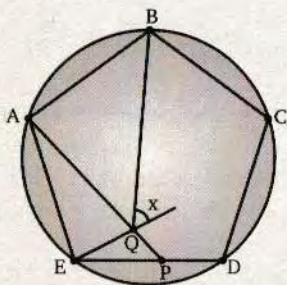
20. Dos lados no consecutivos de un pentágono regular cuyo lado mide $(\sqrt{5} - 1)$, se prolongan hasta que se intersectan. Calcule las longitudes de las prolongaciones.

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 4
D) 3 E) 2

21. En un octógono regular ABCDEFGH, inscrito en una circunferencia de centro O y radio de longitud R. Las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{ED}$ se interceptan en el punto P. Calcular PO.

A) $R\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$ B) $R\sqrt{5 - \sqrt{2}}$
C) $R\sqrt{3 + \sqrt{2}}$
D) $R\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ E) $R\sqrt{3 - \sqrt{2}}$

22. En la figura, ABCDE es un pentágono regular. Si AQ es la sección áurea de la diagonal del pentágono, calcular el valor de X.



- A) 18 B) 36 C) 54
D) 72 E) 82
23. En un dodecágono regular cuyo lado mide $\sqrt{36 - 18\sqrt{3}}$ se inscribe un triángulo equilátero, tal que los vértices del triángulo pertenecen a los vértices del dodecágono. calcular el perímetro del triángulo equilátero.
- A) $9\sqrt{6}$ B) $10\sqrt{6}$ C) $11\sqrt{6}$
D) $12\sqrt{6}$ E) $14\sqrt{6}$
24. En el exterior de un cuadrado MNPQ se construye el triángulo equilátero NKP. Si $MN=2$, calcular el circunradio del triángulo MNR.

- A) $2\sqrt{3+\sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
C) $2\sqrt{3+2\sqrt{3}}$
D) $2\sqrt{2+2\sqrt{3}}$ E) $4\sqrt{3+\sqrt{2}}$

25. En un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia, $BC = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ y $m\angle BAC = 72^\circ$. Calcular la longitud del radio.

- A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{6}{5}$

26. En un pentágono regular ABCDE la longitud de su lado es $(\sqrt{5} + 1)$, calcular la longitud del lado del pentágono regular determinado al trazar los segmentos cuyos extremos son los puntos medios de dos lados no consecutivos.

- A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 5,5

27. Calcule la longitud del arco de circunferencia cuya medida es 108° , que subtiende una cuerda de longitud igual a $(\sqrt{5} + 1)$.

- A) $\frac{3}{5}\pi$ B) $\frac{4}{5}\pi$ C) $\frac{6}{5}\pi$
D) 2π E) 3π

28. un hexágono regular ABCDEF, se encuentra inscrito en una circunferencia de radio R. Si $\overline{BC} \cap \overline{FD} = \{P\}$ y $\overline{AF} \cap \overline{CE} = \{Q\}$

- A) 2R B) 3R C) 4R
D) 6R E) 8R

29. En un dodecágono regular ABCDEFGHIJKL, se ubica el punto P en $\overline{LK}$, tal que $AP=6$ y $PI=8$. Calcular PE.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 10 E) $10\sqrt{3}$

30. Se tiene el hexágono regular ABCDEF inscrito en una circunferencia, tal que $AB=L$. Si G es punto medio del arco DE y H es punto medio de $\overline{FA}$, calcular GH.

A) $\frac{L}{5}\sqrt{6+3\sqrt{2}}$ B) $\frac{L}{3}\sqrt{3+2\sqrt{3}}$
C) $\frac{L}{4}\sqrt{5+3\sqrt{2}}$
D) $\frac{L}{2}\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ E) $\frac{L}{2}\sqrt{7+2\sqrt{3}}$

31. En un triángulo rectángulo un ángulo mide 11,25 y la hipotenusa mide 24. Calcule la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa.

A) $6\sqrt{2+\sqrt{2}}$ B) $6\sqrt{2-\sqrt{2}}$
C) $3\sqrt{2+\sqrt{2}}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{4-\sqrt{2}}$

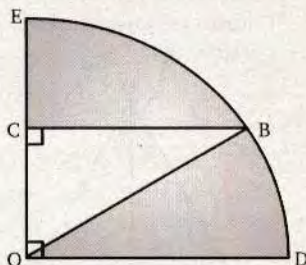
32. Calcular la longitud del lado de un polígono regular de 12 lados circunscrito a una circunferencia cuyo radio mide r.

A) $r(2-\sqrt{3})$ B) $2r(3-\sqrt{2})$
C) $2r(2-\sqrt{3})$
D) $3r(3-\sqrt{2})$ E) $2r\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

33. Sea R el circunradio de un polígono regular de 32 lados. Calcular la longitud de su lado.

A) $R\sqrt{2-\sqrt{2}+2}$
B) $R\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$
C) $R\sqrt{2-\sqrt{2}-\sqrt{2}}$
D) $R\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$
E) $R\sqrt{2+\sqrt{2}}$

34. Si $OB=4$ y $EC=1$, calcular el perímetro de la región sombreada.

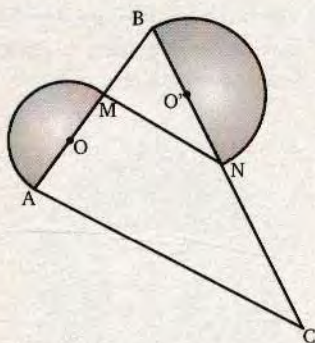


A) $7+\sqrt{7}+2\pi$ B) $8+\sqrt{7}+2\pi$
C) $1+\sqrt{7}+2\pi$
D) $3+\sqrt{7}+2\pi$ E) $9+\sqrt{7}+2\pi$

35. En la figura, $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$, $BN = \frac{2}{3} AM$,

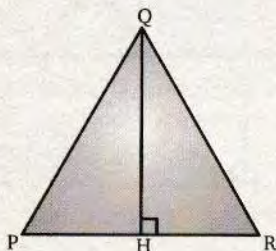
$MB=6$ y $NC=25$.

Calcular el perímetro de la región sombreada, si O y O' son centros.



- A) $12,5\pi + 25$ B) $25\pi + 15$
 C) $25(\pi + 2)$
 D) $10,5\pi + 21$ E) $15\pi + 25$

36. En la figura, $PQ = PR$, $PH = 7$ y $QR = 30$. Calcular el perímetro de la región triangular PQR .

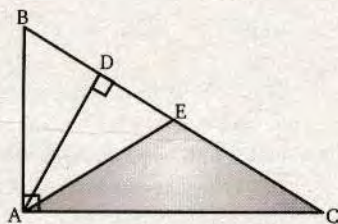


- A) 64 B) 65 C) 67
 D) 70 E) 80

37. En una circunferencia de radio 6, se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ que se intersecan en E , tal que $m\angle AFC = 15$. Calcular la suma de las longitudes de los arcos AC y BD .

- A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{5}$
 D) $\frac{\pi}{3}$ E) π

38. En el gráfico, $\overline{AE}$ es bisectriz del $\angle DAC$ y $m\angle DAE = m\angle C$. Calcular el perímetro de la región triangular AEC .

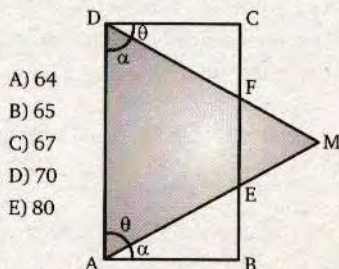


- A) $24 + \sqrt{3}$ B) $12 + \sqrt{3}$ C) $12(1 + \sqrt{3})$
 D) $12(2 + \sqrt{3})$ E) $24\sqrt{3}$

39. Un triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia C . Si M pertenece a C y $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 80$, calcular la longitud de la circunferencia C .

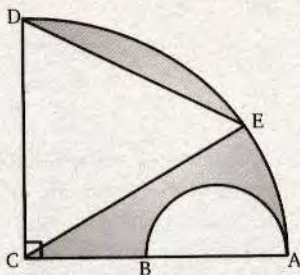
- A) $10\pi\sqrt{3}$ B) $\frac{10\pi}{3}$ C) $\frac{10\pi\sqrt{3}}{3}$
 D) $\frac{4\pi}{3}\sqrt{30}$ E) $\frac{20\pi}{3}\sqrt{3}$

40. En el rectángulo $ABCD$, las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{FC}$ son 2 y 4, respectivamente. Si $AE = EM$, calcular el perímetro del rectángulo.



- A) 64
 B) 65
 C) 67
 D) 70
 E) 80

41. En la figura, haciendo centro en C se ha trazado el arco AD. Si AB es diámetro, $AB=BC=2$ y $CD=DE$, calcular el perímetro de la región sombreada.

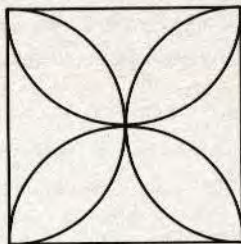


- A) $9 + 2\pi$ B) $8 + 3\pi$ C) $10 + \frac{3\pi}{2}$
 D) $8 + \frac{5\pi}{2}$ E) $10 + 3\pi$
42. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- I. Todo polígono regular tiene centro de simetría.
 II. Todo polígono regular tiene ejes de simetría.
 III. Un polígono no convexo no tiene centro de simetría.
- A) VVF B) FVV C) FVF
 D) VVV E) FFF
43. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- I. El rectángulo tiene 3 ejes de simetría.
 II. El polígono regular de n lados

III. Si un polígono tiene solo dos ejes de simetría, el polígono es regular.

- A) VVV B) VVF C) VFF
 D) FVF E) FVV

44. En la figura se observa una ventana cuadrada de fierro de lado L . Las curvas son semicircunferencias. Calcule la longitud del fierro usado.



- A) $L(\pi + 2 + \sqrt{2})$ B) $\frac{L}{3}(\pi + 2 + \sqrt{2})$
 C) $\frac{L}{2}(\pi + 2 + \sqrt{2})$
 D) $L(\pi + 2 + \sqrt{2})$ E) $2L(\pi + 2 + \sqrt{2})$
45. ABCD es un rectángulo y CEFT es su simétrico con respecto de C. Si $BC=2AB=4$, calcular BE.
- A) $\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{17}$ C) $\sqrt{15}$
 D) $2\sqrt{15}$ E) $\sqrt{19}$

46. En un pentágono convexo ABCDE y equiángulo, se ubica el punto P en el interior, tal que P es simétrico de B respecto de $\overline{AC}$ y simétrico de D respecto de CE. Si $BC=CD$ y $AB=DE$, calcular la $m\angle PAE$.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

47. En un cuadrado ABCD de centro O, Q es un punto de AD, el punto P es el simétrico de Q respecto de O, Q y D son simétricos de la recta que contiene a la bisectriz del ángulo QPD.

Calcular $\frac{AQ}{AB}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

48. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 1. haciendo centros en A y C se trazan arcos de radios igual a la longitud del lado del cuadrado. la diagonal $\overline{AC}$ es intersectada por los arcos en P y Q. Calcular el perímetro de la región mixtilínea PBQ.

A) $2 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{3}$ B) $2 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$
C) $3 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{3}$
D) $2 + \sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$ E) $4 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{3}$

49. ABCD y $AB'CD'$ son rombos simétricos respecto de $\overline{BC}$; siendo la $m\angle A = 120$ y $AB=a$. Si O es el punto de intersección de las diagonales y O' su simétrico respecto de BC, calcular OO' .

A) $\frac{a}{3}$ B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$
D) a E) $a\sqrt{2}$

50. En un hexágono regular ABCDEF de lado 10 se observa que: $\overline{BF} \cap \overline{AE} = \{M\}$ y $\overline{CE} \cap \overline{BD} = \{N\}$. Si $AB'C'D'E'F'$ es el simétrico de ABCDEF respecto de $\overline{MN}$, calcular BB' .

A) $10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ B) $10\sqrt{2-\sqrt{3}}$
C) 15
D) 20 E) $5\sqrt{2+\sqrt{3}}$

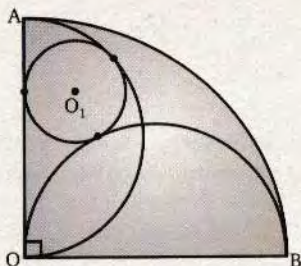
51. Se tiene un rectángulo ABCD cuyo lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden a y 2a respectivamente, luego se construye $AB'CD'$ el simétrico de ABCD con relación a $\overline{AC}$. Calcule la distancia de B a D'.

A) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$
D) $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$ E) $\sqrt{5}a$

52. Se tiene dos rectángulos simétricos ABCD y $AB'CD'$ cuyos lados $AB=a$ y $BC=6$. Calcular BD'

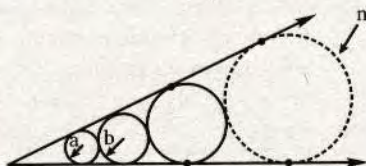
A) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{6}{\sqrt{13}}$ C) $\frac{8}{\sqrt{13}}$
D) $\frac{10}{\sqrt{13}}$ E) $\frac{1}{\sqrt{13}}$

53. En la figura mostrada, AOB es un cuadrante, AO y OB son los diámetros de las semicircunferencias y $OA=OB=9$. Calcular la longitud de la circunferencia de centro O_1 .



- A) 2π B) 3π C) 4π
D) 6π E) 9π

54. En la figura, calcular la longitud de la circunferencia de lugar n.



- A) $2\pi a^n \cdot b^{n-1}$ B) $2\pi a^{-n} \cdot b^{n-1}$
C) $2\pi a^{n-1} \cdot b^{n-1}$
D) $2\pi b^{n-1} \cdot a^{2-n}$ E) $2\pi a^{n-2} \cdot b^{n-1}$
55. En las siguientes proposiciones indicar el valor de verdad:

- I. Todos los polígonos regulares tienen centro de simetría.
II. El rectángulo y el triángulo isósceles tienen 3 ejes de simetría.

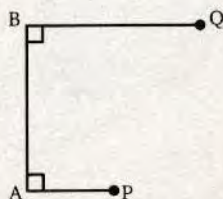
- III. Los polígonos regulares de n lados tienen n ejes de simetría.

- A) VVV B) FVV C) FFV
D) FFF E) VFF

56. En un cuadrado ABCD de lado $\sqrt{10}$, se ubica M punto medio de $\overline{CD}$ y se construye el cuadrado $AB'C'D'$ simétrico al primero, con relación a $\overline{AM}$. Calcule la longitud del segmento $\overline{DD'}$.

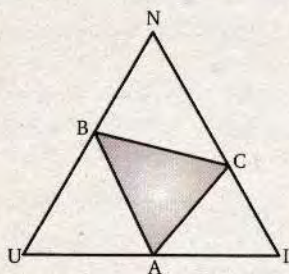
- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 3

57. En la figura, $AB=20$, $AP=3$ y $BQ=12$. Una persona ubicada en el punto P debe llegar a un punto de $\overline{AB}$ y luego dirigirse al punto Q. Calcular la longitud del mínimo recorrido.



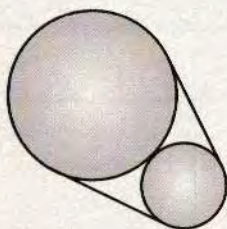
- A) 21 B) 24 C) 25
D) 26 E) 28

58. En el gráfico, el triángulo UNI es equilátero. Calcular el mínimo perímetro de la región ABC, si $UN=6$.



- A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 9
D) $2\sqrt{21}$ E) $3\sqrt{21}$

59. En la figura, el radio de una rueda es el triple del radio de la otra. Si la longitud de la correa de transmisión de ambas ruedas mide M, calcular la longitud del radio menor.



- A) $\frac{3M}{14\pi + 12\sqrt{3}}$ B) $\frac{3M}{8\pi + 12\sqrt{3}}$
C) $\frac{3M}{14\pi + 8\sqrt{3}}$
D) $\frac{3M}{14\pi + 14\sqrt{3}}$ E) $\frac{3M}{8\pi + 14\sqrt{3}}$

60. El lado de un pentágono regular ABCDE mide $(\sqrt{5} - 1)$. Calcular la longitud del arco CD, que tiene como centro la intersección de las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$.

- A) $\frac{2\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) π
D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{5\pi}{2}$

61. Los puntos A, B y C son puntos consecutivos de una circunferencia de radio R. Si $AB = R\sqrt{2}$ y $BC = R\sqrt{2} - \sqrt{2}$ calcular la longitud de la cuerda AC.

- A) R B) $R(\sqrt{3} - 1)$
C) $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
D) $R(\sqrt{5} + 1)$ E) $R(2 + \sqrt{2})$

62. En una circunferencia de radio R, está inscrito un pentadécágono cuyo apotema mide x. Calcular la longitud del lado del polígono regular de 30 lados inscrito en la misma circunferencia.

- A) $\sqrt{2R^2 - 2RX}$ B) $\sqrt{2R^2 + 2RX}$
C) $\sqrt{2R^2 - RX}$
D) $\sqrt{R^2 - RX}$ E) $\sqrt{2R^2 - 3RX}$

63. En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 90^\circ$ y $m\angle ACB = 18^\circ$. Se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$ y $\overline{BH}$ perpendicular a $\overline{AD}$ ($H \in \overline{AD}$). Si $AB = 3\sqrt{5} + 5$, calcular DH.

- A) 3 B) 4 C) 4,5
D) 5 E) 6

64. ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio $R=2$, tal que $m\angle CAD = 45$ y $m\angle ACD = 112,5$. Si B pertenece al arco AC y $m\angle ADB = m\angle BDC$, calcular AB.

A) $2\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}$
 C) $\sqrt{2+\sqrt{2}-\sqrt{2}}$
 D) $\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ E) $2\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2}}$

65. En el lado AE de un octágono regular ABCDEFGH se ubica el punto M, tal que $BD=DM$. Calcular la $m\angle MBD$.

A) 22,5 B) 30 C) 45
 D) 60 E) 75

66. Calcule la longitud de una circunferencia circunscrita a un pentágono regular cuyo apotema mide $(\sqrt{5}+1)$.

A) 8π B) 10π C) 12π
 D) 14π E) 16π

67. En un polígono regular ABCDEF... se verifica que:

A) $AC^2 + AB^2 = AD - BC$
 B) $AC^2 - AB^2 = AD \cdot BC$
 C) $AC^2 \cdot AB^2 = AD \cdot BC$
 D) $AC^2 + AB^2 = AD \cdot BC$
 E) $AC^2 - AB^2 = AD - BC$

68. En un decágono regular ABCDEFGHILJ se trazan $BQ \perp AF$ y $DM \perp AF$. Si $BQ = x$ y $DM = y$, calcular $\left(\frac{x}{y}\right)$.

A) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{3}$
 C) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
 D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

69. En un cuadrilátero ABCD los ángulos BCA y ABD miden 17 y 19, respectivamente. Si la longitud del radio de la circunferencia circunscrita es $\sqrt{5}+1$. Calcular BD.

A) $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ B) $\sqrt{5}-1$
 C) $\sqrt{5+2\sqrt{10}}$
 D) $\sqrt{10+\sqrt{5}}$ E) $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

70. En una circunferencia se trazan las cuerdas AB y AC, tal que $m\angle BAC = 60$. Luego, por L se traza la recta tangente a la circunferencia, determinando con AC un ángulo cuya medida es 15. calcular $AB - AC$.

A) ℓ_3 B) ℓ_4 C) ℓ_5
 D) $2\ell_3$ E) $2\ell_4$

71. En un pentágono regular ABCDE cuyo lado mide ℓ , las diagonales AC y BD se intersecan en el punto Q. Calcular QE.

A) $\frac{\ell}{2}(\sqrt{5}-1)$ B) $\frac{3}{2}\ell$
 C) $\frac{\ell}{2}\sqrt{6}$
 D) $\frac{\ell}{2}(\sqrt{5}+1)$ E) $\frac{\ell}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

72. En un hexágono regular ABCDEF, M es punto medio de $\overline{CE}$ y $\overline{FM} \cap \overline{BC} = \{P\}$. Desde P se traza la tangente $\overline{PQ}$ a la circunferencia circunscrita de radio R, tal que $\overline{PQ} \cap \overline{FE} = \{T\}$, calcular ET.

A) $2R(5 - 2\sqrt{6})$ B) $2R(5 + \sqrt{6})$
 C) $2R(5 - \sqrt{6})$
 D) $R(5 - 2\sqrt{6})$ E) $R(5 + \sqrt{6})$

73. Un cuadrado MNPQ de lado ℓ , está inscrito en una circunferencia. En el punto medio de $\overline{PQ}$ y en el arco PQ se ubican los puntos A y B, respectivamente, tal que $QB = 2AB$. Si en la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica el punto C, de modo que $BA = AC$, calcular MC.

A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{3\ell}{2}$ C) ℓ
 D) 2ℓ E) $\frac{5\ell}{2}$

74. Dado un pentágono regular ABCDE de centro O, se ubican los puntos medios M y N de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, tal que $\overline{AM} \cap \overline{BN} = \{P\}$. Si $CP = \ell$, calcular la distancia de O a $\overline{AM}$.

A) $\frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$ B) $\frac{\ell \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$
 C) $\frac{\ell(\sqrt{5}+1)}{4}$
 D) $\frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ E) $\frac{\ell \sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

75. En un octágono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia, se ubica el punto P en el arco $\overline{AH}$. Si $PG = a$ y $PB = b$, calcular PD.

A) $2a\sqrt{2-\sqrt{2}} + b$ B) $a + 2b$
 C) $2a + b$
 D) $a + b\sqrt{2+\sqrt{2}}$ E) $a\sqrt{2-\sqrt{2}} + b$

76. ABCDEF es un hexágono regular de lado L circunscrito a una circunferencia de centro O. Calcule el perímetro del octágono regular inscrito en dicha circunferencia.

A) $21\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $4L\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
 C) $6L\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
 D) $8L\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $10L\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

77. El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de radio R. Si $m\angle A = 22^\circ$, y $m\angle C = 45^\circ$, calcular la longitud de la mediana CM.

A) $\frac{R\sqrt{6}}{4}$ B) $\frac{R\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{R\sqrt{6}}{3}$
 D) $2\sqrt{6}R$ E) $\frac{3R\sqrt{6}}{2}$

78. Sea ℓ_8 y a_8 , el lado y la apotema de un octógono regular ABCDEFGH. Calcular la longitud del lado de un cuadrado que tiene por vértices los puntos medios de los lados AB y CD del octógono.

A) $\frac{\ell_8}{2} + \frac{a_8}{4}$ B) $\frac{\ell_8}{2} + \frac{a_8}{3}$
 C) $\frac{\ell_8}{2} + a_8$
 D) $\frac{\ell_8}{2} + 2a_8$ E) $\frac{\ell_8 + 4a_8}{4}$

79. En un pentágono regular ABCDE, M es punto medio de $\overline{BE}$ y F es punto medio de $\overline{DC}$. Si $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AF} = 1$, calcular la longitud del lado del polígono regular.

A) $\sqrt{10 - 2\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{10 - 2\sqrt{3}}$
 C) $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
 D) $\sqrt{6 - 2\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

80. En el interior de un triángulo ABC recto en B, se ubica el punto P tal que $m\angle PBC = 28$, $m\angle PCB = 15$ y $m\angle BAC = 43$. Si $AC = 8$. Calcular PB

A) $4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ B) $4\sqrt{2 - \sqrt{5}}$
 C) $2(\sqrt{5} - 1)$
 D) $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ E) $4(\sqrt{5} - 1)$

81. Sean ℓ_5 , ℓ_6 y ℓ_{10} las longitudes de los lados de un pentágono regular, hexágono regular y decágono regular, respectivamente, inscritos en la misma circunferencia. Calcular

$$\frac{(\ell_5 - \ell_{10})(\ell_5 + \ell_{10})}{\ell_6^2}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
 D) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ E) $\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$

82. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se tiene que: $AC = R$ y $m\angle C = 9$. Calcular la longitud de la altura BH.

A) $R(\sqrt{5} - 1)$ B) $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{4}$
 C) $\frac{R(\sqrt{5} - 1)}{8}$
 D) $\frac{R(\sqrt{5} + 1)}{4}$ E) $\frac{R(\sqrt{5} + 1)}{8}$

83. En un triángulo ABC, $m\angle BAC = 30$ y $AB = AC$, se inscribe un cuadrado PQRS, tal que $\overline{SR}$ está contenido en $\overline{AC}$, P y Q pertenecen a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si $\overline{BS}$ y $\overline{BR}$ intersecan a $\overline{PQ}$ en M y N, y $MN = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, calcular BC.

A) 6 B) 7 C) 8
 D) 9 E) 10

84. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se traza la cuerda $\overline{MQ}$ paralela al diámetro $\overline{AB}$ ($M \in \overline{AQ}$). Se ubica el punto P en el radio $\overline{OB}$, tal que $PM = 7$, $PA = 8$ y $PQ = \sqrt{21}$. Calcular PB.

A) 3 B) 3,8 C) 4,5
 D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

85. En un pentágono regular ABCDE, M es punto medio del arco CD. Si $MB \cdot MC \cdot MD \cdot ME = 36$, calcular el circunradio del polígono.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$
 D) 3 E) 4

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

86. En un sector circular AOB, se inscribe el cuadrado MNPQ cuyo lado mide $2\sqrt{2} - \sqrt{2}$. Si $m\angle AOB = 45^\circ$, calcular OA.

A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

87. Un octógono regular MNPQRSTU, está inscrito en una circunferencia de radio r. Si $\overline{NR} \cap \overline{PS} = \{A\}$, $\overline{MS} \cap \overline{NT} = \{B\}$ y la longitud de la proyección de AB sobre $\overline{PS}$ es $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$, calcular el valor de r.

A) $3\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ B) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$
C) $3\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
D) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ E) $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

88. En un polígono regular de 13 lados ABC...LM. Si $AD = m$ y $AE = n$, calcular DJ.

A) $\sqrt{m^2 + 2n^2}$ B) $\sqrt{n^2 - mn}$
C) $\sqrt{m^2 + mn}$
D) $\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{2}}$ E) $\sqrt{m^2 + 2mn}$

89. una circunferencia C de centro O está exinscrita a un triángulo ABC (tangente a las prolongaciones de AB y AC en los puntos Q y T, respectivamente). La prolongación de $\overline{AO}$ interseca a C en P tal que P y Q son simétricos respecto de la recta $\overline{OT}$. Calcular la $m\angle PAT$.

A) 22,5 B) 30 C) 37
D) 45 E) 53

90. ABCD... y ABPQ... son dos polígonos regulares, tales que B-P-D y $m\angle CBD = 20^\circ$. Si $PQ = 6$, calcular la longitud del circunradio del polígono regular ABPQ...

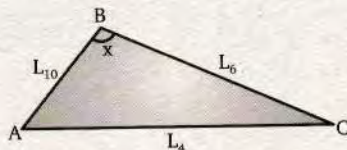
A) 3 B) 6 C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

91. Calcule la longitud del lado del polígono regular de 20 lados, si el diámetro de la circunferencia circunscrita mide $\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

A) $\frac{1}{4}\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ B) $\frac{\sqrt{6 - \sqrt{5}}}{2}$
C) $\frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{6 - \sqrt{5}}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{6 - \sqrt{5}}}{4}$

92. Sea ABCD un pentágono regular inscrito en una circunferencia. Se ubica el punto M en el arco BC y luego se une con los vértices. Demostrar que: $MB + ME + MC = MA + MD$

93. En la figura, $AB = L_{10}$, $BC = L_6$ y $AC = L_4$. Calcular el valor de x, si L_{10} , L_6 , L_4 son las longitudes de los lados de un decágono regular, hexágono regular y cuadrado, respectivamente, inscritos en una misma circunferencia.



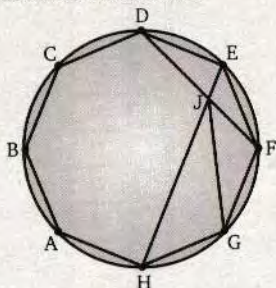
A) 60 B) 75 C) 120
D) 135 E) 150

94. En un pentágono regular ABCDE, las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$ se intersectan en P. Si $AP = a$, $PC = b$ y $DE = c$. Calcular el

valor de $\left(\frac{a^2 - b^2}{c^2}\right)$.

- A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 1,5
D) $\sqrt{3}$ E) 2

95. En el gráfico, se muestra un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio R. Calcular JG.



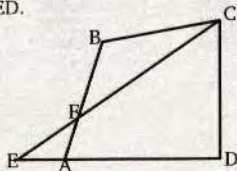
- A) $R\sqrt{14+9\sqrt{2}}$ B) $R\sqrt{7+4\sqrt{2}}$
C) $R\sqrt{7-4\sqrt{2}}$
D) $R\sqrt{14-9\sqrt{2}}$ E) $R\sqrt{14-8\sqrt{2}}$

96. Sea n el número de lados de un polígono regular, a_p su apotema y R su circunradio.

Demostrar que: $4a_{p_{2n}}^2 - 2a_{p_n} \cdot R = 2R^2$

97. En la figura mostrada, $FC=8$, $BC=CD$, $m\angle BCE=18^\circ$, $m\angle BCD=m\angle BAD=72^\circ$. Calcular ED.

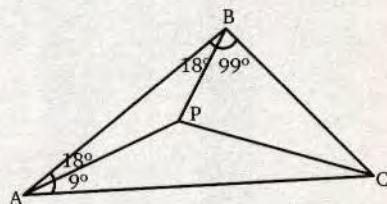
- A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10



98. En un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de radio R , el lado del polígono regular de doble número de lados inscrito en la misma circunferencia mide ℓ_{2n} . Calcular la longitud del apotema del polígono regular de n lados en función de R y ℓ_{2n} .

- A) $2R - \left(\frac{\ell_{2n}}{\sqrt{2R}}\right)^2$ B) $R - \left(\frac{\ell_{2n}}{\sqrt{2R}}\right)^2$
C) $\frac{R}{2} - \left(\frac{\ell_{2n}}{\sqrt{2R}}\right)^2$
D) $R - \frac{(\ell_{2n})^2}{4R}$ E) $R - \frac{(\ell_{2n})^2}{R}$

99. Del gráfico, calcular $\frac{AB}{PC}$.



- A) 0,3 B) 0,4 C) 0,5
D) 1 E) 0,75

100. Se tiene un hexágono convexo ABCDEF, tal que $AB = DE$, $BC = FE$ y $CD = AF$. Si $m\angle BAF + m\angle BCD + m\angle FED = 360^\circ$, demostrar que los ángulos opuestos en el hexágono son congruentes.

**CLAVES**

1	B
2	D
3	D
4	C
5	A
6	A
7	C
8	B
9	D
10	D
11	C
12	A
13	B
14	E
15	A
16	C
17	B
18	B
19	B
20	E
21	A
22	C
23	A
24	B
25	B

26	A
27	C
28	C
29	B
30	E
31	B
32	C
33	D
34	E
35	A
36	E
37	E
38	D
39	D
40	A
41	E
42	C
43	D
44	E
45	B
46	E
47	C
48	B
49	C
50	D

51	C
52	D
53	C
54	D
55	C
56	B
57	C
58	C
59	A
60	A
61	C
62	A
63	D
64	A
65	E
66	A
67	B
68	A
69	A
70	B
71	E
72	A
73	C
74	D
75	E

76	B
77	B
78	C
79	C
80	B
81	B
82	C
83	D
84	D
85	C
86	B
87	D
88	C
89	B
90	B
91	A
92	P
93	C
94	A
95	D
96	P
97	C
98	B
99	D
100	P

P: Para Demostrar

EXÁMENES DE ADMISIÓN UNIV

UNI - 2014 - I

PROBLEMA 01: Calcule el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG,

$$\text{si: } \frac{1}{AE} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{5}.$$

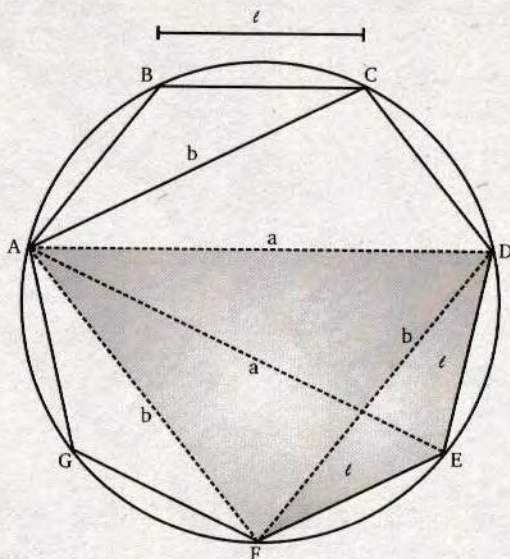
- A) 34
D) 37

B) 35

- C) 36
E) 38

Resolución:

Piden el perímetro del heptágono regular (2p).

Dato $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$; siendo $AE = a$ y $AC = b$ 

Como $\square ADEF$ es un cuadrilátero inscrito, aplicamos el teorema de Ptolomeo, entonces:

$$a \cdot \ell + b \cdot \ell = a \cdot b$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\ell}$$

Luego, del dato

$$\ell = 5$$

Nos piden 2p.

$$\therefore 2p = 7\ell = 7(5) = 35$$

Rpta.: B

PROBLEMA 02:

La generatriz de un cilindro oblicuo de base circular mide igual que el diámetro del cilindro disminuido en 10 dm. Sean M y N los centros de las bases y AB un diámetro de la base inferior que contiene a N. Si $AM = 19$ dm y $MB = 13$ dm entonces el volumen del cilindro (en dm^3) es:

A) $130\pi\sqrt{103}$

B) $131\pi\sqrt{104}$

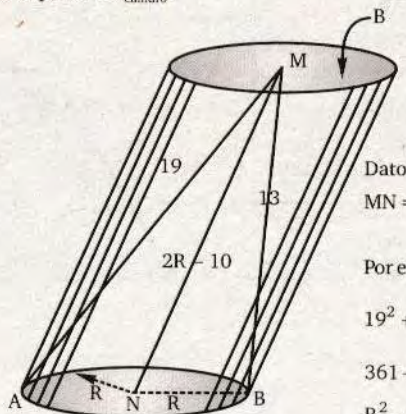
C) $132\pi\sqrt{105}$

D) $133\pi\sqrt{106}$

E) $134\pi\sqrt{107}$

Resolución:

Nos piden el V_{cilindro} .



Dato

$$MN = 2R - 10$$

Por el teorema de la mediana ($\triangle AMB$)

$$19^2 + 13^2 = 2(2R - 10)^2 + \frac{(2R)^2}{2}$$

$$361 + 169 = 2(2R - 10)^2 + 2R^2$$

$$R^2 - 8R - 33 = 0$$

Resolviendo, $R = 11$, de allí $B = (11)^2$.

Calculamos la altura del cilindro usando el teorema de Herón ($\triangle AMB$).

$$h = \frac{2}{AB} \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{12}{11} \sqrt{105}$$

$$\therefore V_{\text{cilindro}} = B \cdot h = 132\pi\sqrt{105}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 03:

Sea ABCD un cuadrilátero, donde el ángulo exterior D mide la mitad del ángulo interior B y la diagonal $\overline{BD}$ biseca al ángulo ABC. Si $BC = 25$ u y $BD = 20$ u, determine AB (en u).

A) 12
D) 18

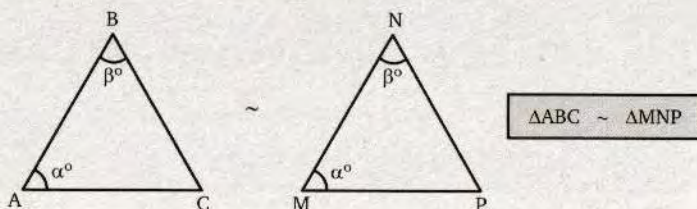
B) 14

C) 16
E) 20

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 13

Resolución:

Para que dos triángulos sean semejantes, solo es necesario que tengan un par de ángulos de la misma medida.



Nos piden $AB = x$

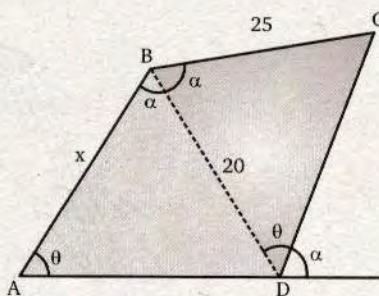
En el $\triangle ABD$, por el teorema del ángulo exterior, se tiene que

$$m\angle BAD = m\angle BDC = \theta$$

Se observa $\triangle ABD \sim \triangle BDC$, entonces

$$\frac{x}{20} = \frac{20}{25}$$

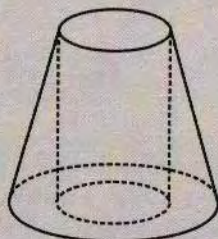
$$\therefore x = 16$$



Rpta.: C

PROBLEMA 04:

La altura de un cono circular recto mide 15 cm y el radio de su base 8 cm. Se taladró un agujero cilíndrico de diámetro 4 cm en el cono, a lo largo de su eje, resultando un sólido como el que se muestra en la figura. Calcule el volumen de ese sólido.



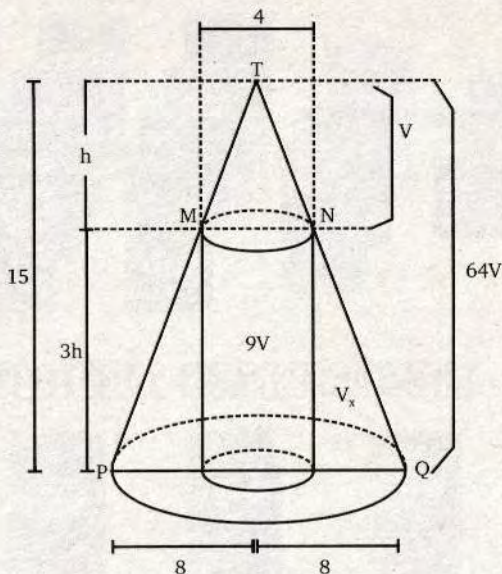
A) $240\pi \text{ cm}^3$
D) $264\pi \text{ cm}^3$

B) $254\pi \text{ cm}^3$

C) $260\pi \text{ cm}^3$
E) $270\pi \text{ cm}^3$

Piden V_x .

V_x : volumen del sólido después del taladrado



Por semejanza de conos

$$\left(\begin{matrix} \text{cono} \\ \text{menor} \end{matrix} \right)_{(TMN)} = \left(\begin{matrix} \text{cono} \\ \text{mayor} \end{matrix} \right)_{(TPQ)}$$

La razón de sus bases es de 1:4; entonces la razón de sus volúmenes es de 1:64.

$$\rightarrow V_x + 10V = 64V$$

$$V_x = 54V \quad (I)$$

Luego

$$V_{\text{conomayor}} = \frac{1}{3} \times (\pi 8^2) \times (15)$$

Entonces

$$64V = V_{\text{conomayor}}$$

$$V = 5\pi \quad (II)$$

De (II) y (I)

$$\therefore V_x = 270\pi$$

Rpta.: E

LIBROS



RESÚMENES TEÓRICOS



TEMAS SELECTOS





T. S.	TEMA
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación, Congruencia y Aplic.)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza Triángulos - R. M. Circunferencia
6	Relaciones Métricas en Triángulos y en Cuadriláteros
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos

Teléfonos: 424 - 6350
992 - 796104

f / fondoeditorialrodo
editorialrodo@gmail.com